

Lista de Exercícios

Conjuntos Contáveis e Não-Contáveis

1. Encontre o cardinal dos seguintes conjuntos:

a) $A = \{a, b, c, \dots, y, z\}$

b) $B = \{1, -3, 5, 11, -28\}$

c) $C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x^2 = 5\}$

2. Encontre o cardinal dos seguintes conjuntos:

a) $A = \{10, 20, 30, \dots\}$

b) $B = \{6, 7, 8, 9, \dots\}$

3. Encontre o cardinal dos seguintes conjuntos:

a) $A = \{\text{Segunda, Terça, } \dots, \text{Domingo}\}$

b) $B = \{x \mid x^2 = 25 \wedge 3x = 6\}$

c) $P(A)$, se $A = \{1, 4, 5, 9\}$

4. Seja o conjunto $P = \{2, 4, 6, \dots\}$ o conjunto dos números inteiros positivos pares. Mostre que $|P| = \aleph_0$.

5. Prove que o conjunto dos inteiros positivos é enumerável.

Álgebra de Conjuntos

1. Suponha o conjunto universo $S = \{p, q, r, s, t, u, v, w\}$ bem como os seguintes conjuntos:

$A = \{p, q, r, s\}$

$B = \{r, t, v\}$

$C = \{p, s, t, u\}$

Então, determine:

a) $B \cap C$

b) $A \cup C$

c) $\sim C$

d) $A \cap B \cap C$

e) $B - C$

f) $\sim(A \cup B)$

g) $A \times B$

h) $(A \cup B) \cap \sim C$

2. Suponha o conjunto universo $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ bem como os seguintes conjuntos:

$A = \{2, 4, 5, 6, 8\}$

$B = \{1, 4, 5, 9\}$

$C = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge 2 \leq x < 5\}$

Então, determine:

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $A \cap C$

d) $B \cup C$

e) $A - B$

f) $\sim A$

g) $A \cap \sim A$

h) $\sim(A \cap B)$

i) $C - B$

j) $(C \cap B) \cup \sim A$

k) $\sim(B - A) \cap (A - B)$

l) $\sim(\sim C \cup B)$

m) $B \times C$

3. Encontre $P(S)$ para $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Quantos elementos você espera que este conjunto tenha?

4. Encontre $P(S)$ para $S = \{\emptyset\}$.

5. O que pode ser dito sobre A se $P(A) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$?

6. Quais das sentenças a seguir são verdadeiras para quaisquer conjuntos A , B e C ?

a) $A \cup A = A$

b) $B \cap B = B$

c) $\sim(A \cap B) = \sim A \cap \sim B$

d) $\sim(\sim A) = A$

e) $A - B = \sim(B - A)$

f) $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$

g) Se $A \cap B = \emptyset$ então $A \subset B$

h) $B \times A = A \times B$

i) $\emptyset \times A = \emptyset$

j) $\emptyset \cap \{\emptyset\} = \emptyset$

k) $(A - B) \cup (B - C) = A - C$

l) $(A - C) \cap (A - B) = A - (B \cup C)$

7. Prove as seguintes propriedades da operação de união (suponha os conjuntos A, B e C):

a) *Elemento Neutro.*

$$A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$$

b) *Idempotência.*

$$A \cup A = A$$

c) *Comutatividade.*

$$A \cup B = B \cup A$$

Lógica Matemática

1. Sabendo que os valores verdade das proposições p e q são respectivamente V e F, determine o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

a) $p \wedge \neg q$

b) $p \vee \neg q$

c) $\neg p \wedge q$

d) $\neg p \wedge \neg q$

e) $\neg p \vee \neg q$

f) $p \wedge (\neg p \vee q)$

2. Determine o valor verdade de p (V(p)) em cada um dos seguintes casos, sabendo que:

a) $V(q) = F$ e $V(p \wedge q) = F$

b) $V(q) = F$ e $V(p \vee q) = F$

c) $V(q) = F$ e $V(p \rightarrow q) = F$

d) $V(q) = F$ e $V(q \rightarrow p) = F$

e) $V(q) = V$ e $V(p \leftrightarrow q) = F$

f) $V(q) = F$ e $V(q \leftrightarrow p) = V$

3. Determine o V(p) e o V(q) em cada um dos seguintes casos, sabendo que:

a) $V(p \rightarrow q) = V$ e $V(p \wedge q) = F$

b) $V(p \rightarrow q) = V$ e $V(p \vee q) = F$

c) $V(p \leftrightarrow q) = V$ e $V(p \wedge q) = V$

d) $V(p \leftrightarrow q) = V$ e $V(p \vee q) = V$

e) $V(p \leftrightarrow q) = F$ e $V(\neg p \vee q) = V$

Teoria dos Conjuntos

1. Descreva cada conjunto a seguir, listando seus elementos.

a) $\{x \mid x \text{ é um número inteiro e } 3 < x \leq 7\}$

b) $\{x \mid x \text{ é um mês com exatamente 30 dias}\}$

c) $\{x \mid x \text{ é a capital do Brasil}\}$

2. Descreva cada um dos conjuntos a seguir através de uma propriedade característica.

a) $\{1, 4, 9, 16\}$

b) $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$

3. Dados os conjuntos $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x \geq 5\}$, $B = \{10, 12, 16, 20\}$ e $C = \{x \mid (\exists y)(y \in \mathbb{N} \text{ e } x = 2y)\}$, diga quais das seguintes sentenças são verdadeiras.

a) $B \subseteq C$

b) $B \subset A$

c) $A \subseteq C$

d) $26 \in C$

e) $\{11, 12, 13\} \subseteq A$

f) $\{11, 12, 13\} \subset C$

g) $\{12\} \in B$

h) $\{12\} \subseteq B$

i) $\{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x < 20\} \not\subset B$

j) $5 \subseteq A$

k) $\{\emptyset\} \notin A$

4. Sejam $R = \{1, 3, \pi, 4, 9, 10\}$, $S = \{\{1\}, 3, 9, 10\}$, $T = \{1, 3, \pi\}$ e $U = \{\{1, 3, \pi\}, 1\}$ conjuntos. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

a) $S \subseteq R$

b) $1 \in R$

- c) $1 \in S$
- d) $1 \subseteq U$
- e) $\{1\} \subseteq T$
- f) $\{1\} \subseteq S$
- g) $T \subset R$
- h) $\{1\} \in S$
- i) $\emptyset \subseteq S$
- j) $T \subseteq U$
- k) $T \in U$
- l) $T \notin R$
- m) $T \subseteq R$
- n) $S \subseteq \{1, 3, 9, 10\}$

5. Sejam $A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\}$, $B = \{a\}$ e $C = \{\emptyset, \{a, \{a\}\}\}$ conjuntos. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- a) $B \subseteq A$
- b) $B \in A$
- c) $C \subseteq A$
- d) $\emptyset \subseteq C$
- e) $\emptyset \in C$
- f) $\{a, \{a\}\} \in A$
- g) $\{a, \{a\}\} \subseteq A$
- h) $B \subseteq C$
- i) $\{\{a\}\} \subseteq A$

Indução Matemática e Recorrência

1. Use indução matemática para provar que as proposições dadas são verdadeiras para todo inteiro positivo n .

- a) $2 + 6 + 10 + \dots + (4n - 2) = 2n^2$
- b) $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$
- c) $1 + 5 + 9 + \dots + (4n - 3) = n(2n - 1)$
- d) $1 + 3 + 6 + \dots + \frac{n(n + 1)}{2} = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{6}$
- e) $4 + 10 + 16 + \dots + (6n - 2) = n(3n + 1)$
- f) $1^2 + 3^2 + \dots + (2n - 1)^2 = \frac{n(2n - 1)(2n + 1)}{3}$