Vetores no Plano e no Espaço

Prof. Rossini Bezerra

FBV

Introdução

- Muitas grandezas físicas, como velocidade, força, deslocamento e impulso, para serem completamente identificadas, precisam, além da magnitude, da direção e do sentido. Estas grandezas são chamadas **grandezas vetoriais ou simplesmente vetores.**
- Geometricamente, vetores são representados por **segmentos (de retas) orientados** (segmentos de retas com um sentido de percurso) no plano ou no espaço.
  - A ponta da seta do segmento orientado é chamada **ponto final ou extremidade**
  - **E o outro** ponto extremo é chamado de **ponto inicial ou origem do segmento orientado.**
- Segmentos orientados com mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento representam o mesmo vetor. A direção, o sentido e o comprimento do vetor são definidos como sendo a direção, o sentido e o comprimento de qualquer um dos segmentos orientados que o representam.

Direção, Comprimento e Sentido

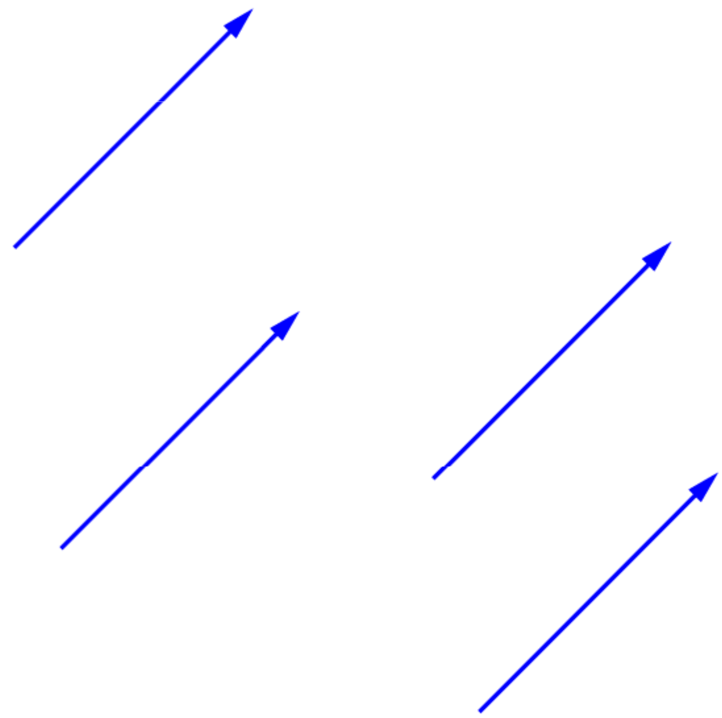
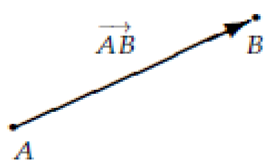


Figura Segmentos orientados representando o mesmo vetor

Igualdade de Vetores

- A definição de igualdade de vetores: Dizemos que dois vetores são iguais se eles possuem o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido.
- Na Figura anterior, temos 4 segmentos orientados, com origens em pontos diferentes, que representam o mesmo vetor, ou seja, são considerados como vetores iguais, pois possuem a mesma direção, mesmo sentido e o mesmo comprimento.
- Se o ponto inicial de um representante de um vetor V é A e o ponto final é B, então escrevemos: $V = \overrightarrow{AB}$



Soma de Vetores e Multiplicação por Escalar

- A soma, V +W, de dois vetores V e W é determinada da seguinte forma:
- tome um segmento orientado que representa V;
- tome um segmento orientado que representa W, com origem na extremidade de V;
- o vetor V +W é representado pelo segmento orientado que vai da origem de V até a extremidade de W.

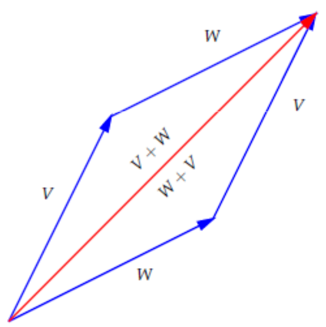


Figura 1 $V + W = W + V$

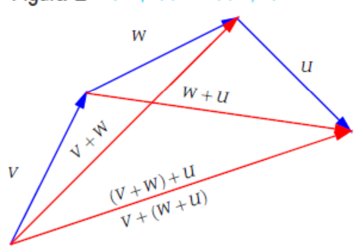


Figura 2 $V + (W + U) = (V + W) + U$

- Da Figura 1, deduzimos que a soma de vetores é comutativa, ou seja, V +W = W + V, (1) para quaisquer vetores V e W. Observamos também que a soma V + W esté na diagonal do paralelogramo determinado por V e W, quando estão representados com a mesma origem.
- Da Figura 2, deduzimos que a soma de vetores é associativa, ou seja, V + (W + U) = (V +W) + U, (2) para quaisquer vetores V, W e U.
- O vetor que tem a sua origem coincidindo com a sua extremidade é chamado **vetor nulo e denotado por $\vec{0}$. Segue então, que** $V+\vec{0}=\vec{0}+V=V$, (3) para todo vetor V.

Diferença

- Para qualquer vetor V, o **simétrico de V, denotado por -V, é o vetor que tem mesmo** comprimento, mesma direção e sentido contrário ao de V. Segue então, que $V+(-V)=\vec{0}$. (4)
- Definimos a **diferença W menos V, por** W-V=W+(-V).
- Segue desta definição, de (1), (2), (4) e de (3) que $W+(V-W)=(V-W)+W=V+(-W+W)=V+\vec{0}=V$.
- Assim, a diferença V-W é um vetor que somado a W dá V, portanto ele vai da extremidade de W até a extremidade de V, desde que V e W estejam representados por segmentos orientados com a mesma origem.

Exemplo

Figura 3. A diferença $V - W$

Multiplicação de um Vetor por um Escalar

- A **multiplicaçã de um vetor V por um escalar** α, α ***V, é determinada pelo vetor que*** possui as seguintes características:
  - (a) é o vetor nulo, se $\alpha = 0$ *ou* $V = \vec{0}$,
  - (b) caso contrário,
    - i. tem comprimento $|\alpha|$ *vezes o comprimento de V,*
    - ii. a direção é a mesma de V (neste caso, dizemos que eles são **paralelos),**
    - iii. tem o mesmo sentido de V, se $\alpha > 0$ *e*
      tem o sentido contrário ao de V, se $\alpha < 0$.
- As propriedades da multiplicação por escalar serão apresentadas mais a frente. Se W = α *V, dizemos que W é* ***um múltiplo escalar de V. É fácil ver que dois vetores*** não nulos são paralelos (ou **colineares) se, e somente se, um é um múltiplo escalar** do outro.

Exemplo

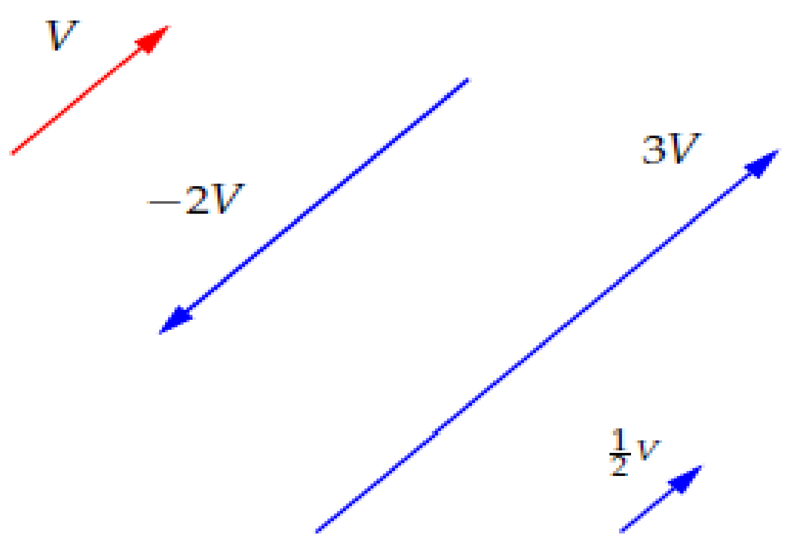


Figura **4** Multiplicação de vetor por escalar

- As operações com vetores podem ser definidas utilizando um **sistema de coordenadas retangulares ou cartesianas. Em primeiro lugar, vamos considerar os vetores no** plano.
- Seja V um vetor no plano. Definimos as **componentes de V como sendo as coordenadas** (v1, v2) do ponto final do representante de V que tem ponto inicial na origem.
- Vamos identificar o vetor com as suas componentes e vamos escrever simplesmente V = (v1, v2).
- Julho

Exemplo

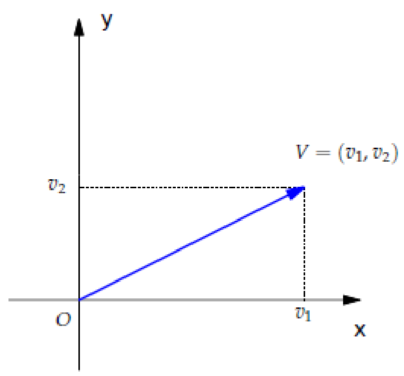


Figura 5 As componentes do vetor V no plano

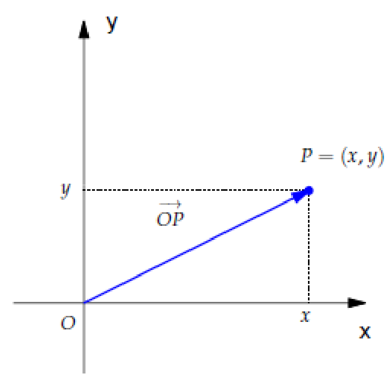


Figura 6 As coordenadas de P são iguais as componentes de $\overrightarrow{OP}$

Assim, as coordenadas de um ponto P são iguais as componentes do vetor $\overrightarrow{OP}$, que vai da origem do sistema de coordenadas ao ponto P. Em particular, o vetor nulo, $\vec{0}$ = (0, 0). Em termos das componentes, podemos realizar facilmente as operações: soma de vetores e multiplicação de vetor por escalar.

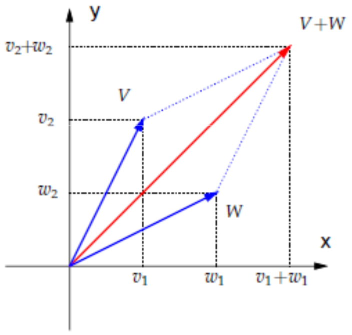


Figura 7 A soma de dois vetores no plano

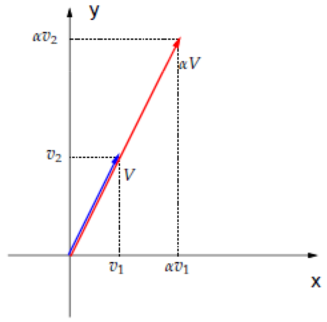


Figura 8 A multiplicação de vetor por escalar no plano

- Como ilustrado na Figura 7, a **soma de dois vetores V = (v1, v2) e** W = (w1,w2) é dada por:
    - V+W=(v1+w1,v2+w2);
- Como ilustrado na Figura 8, a **multiplicação de um vetor V=(v1, v2) por um** escalar α *é dada por:*
    - $\alpha V = (\alpha v1, \alpha v2)$.

Vetor no Espaço

- Definimos as **componentes de um vetor no espaçoo de forma análoga a que fizemos** com vetores no plano. Vamos inicialmente introduzir um **sistema de coordenadas retangulares no espaço. Para isto, escolhemos um ponto como origem O e como eixos** coordenados, três retas orientadas (com sentido de percurso definido), passando pela origem, perpendiculares entre si, sendo uma delas vertical orientada para cima.
- Estes serão os eixos x, y e z. O eixo z é o eixo vertical. Os eixos x e y são horizontais e satisfazem a seguinte propriedade.
    - Suponha que giramos o eixo x pelo menor ângulo até que coincida com o eixo y.
    - Se os dedos da mão direita apontam na direção do semi-eixo x positivo de forma que o semi-eixo y positivo esteja do lado da palma da mão, então o polegar aponta no sentido do semi-eixo z positivo.
    - Cada par de eixos determina um plano chamado de **plano coordenado. Portanto, os três planos** coordenados são: xy, yz e xz.

Vetor no Espaço

- A cada ponto P no espaço associamos um terno de números (x,y,z), chamado de **coordenadas do ponto P como segue.**
- Trace uma reta paralela ao eixo z, passando por P;
- A interseção da reta paralela ao eixo z, passando por P com o plano xy é o ponto P'. As coordenadas de P', (x, y), no sistema de coordenadas xy são as duas primeiras coordenadas de P.
- A terceira coordenada é igual ao comprimento do segmento PP', se P estiver acima do plano xy e ao comprimento do segmento PP' com o sinal negativo, se P estiver abaixo do plano xy.

Vetor no Espaço

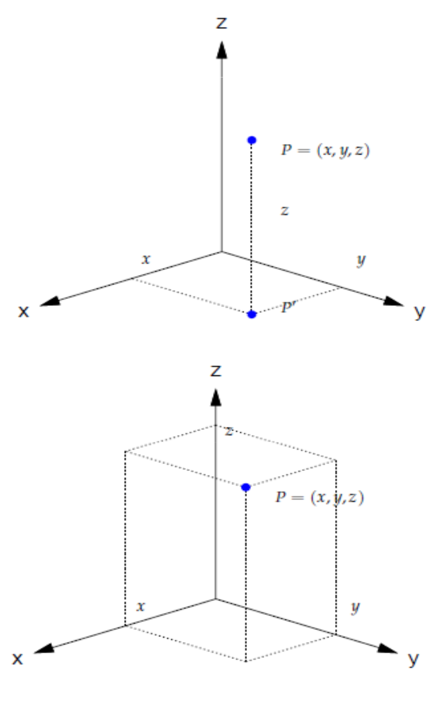


Figura 9 As coordenadas de um ponto no espaço

- As coordenadas de um ponto P são determinadas também da maneira dada a seguir.
  - Passe três planos por P paralelos aos planos coordenados.
  - A interseção do plano paralelo ao plano xy, passando por P, com o eixo z determina a coordenada z.
  - A interseção do plano paralelo ao plano xz, passando por P, com o eixo y determina a coordenada y
  - A interseção do plano paralelo ao plano yz, passando por P, com o eixo x determina a coordenada x.
- Agora, estamos prontos para utilizarmos um sistema de coordenadas cartesianas, também nas operações de vetores no espaço.
- Seja V um vetor no espaço. Como no caso de vetores do plano, definimos as **componentes de V como sendo as coordenadas** (v1, v2, v3) do ponto final do representante de V que tem ponto inicial na origem.
- Também vamos identificar o vetor com as suas componentes e vamos escrever simplesmente V=(v1, v2, v3)

Vetor no Espaço

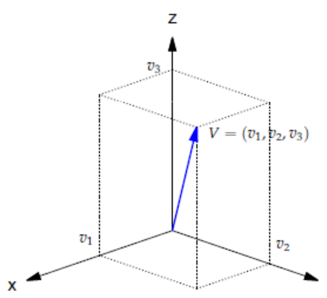


Figura **10** As componentes de um vetor no espaço

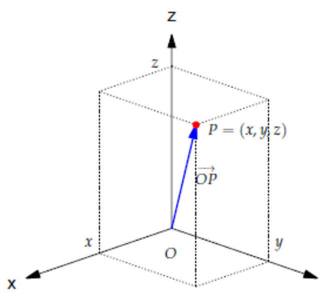


Figura **11** As coordenadas de P são iguais as componentes de $\overrightarrow{OP}$

As coordenadas de um ponto P são determinadas também da maneira dada a seguir.

- Passe três planos por P paralelos aos planos coordenados.
- A interseção do plano paralelo ao plano xy, passando por P, com o eixo z determina a coordenada z.
- A interseção do plano paralelo ao plano xz, passando por P, com o eixo y determina a coordenada y
- A interseção do plano paralelo ao plano yz, passando por P, com o eixo x determina a coordenada x.

Agora, estamos prontos para utilizarmos um sistema de coordenadas cartesianas, também nas operações de vetores no espaço.

Seja V um vetor no espaço. Como no caso de vetores do plano, definimos as **componentes de V como sendo as coordenadas** (v1, v2, v3) do ponto final do representante de V que tem ponto inicial na origem.

Também vamos identificar o vetor com as suas componentes e vamos escrever simplesmente V=(v1, v2, v3)

- Assim, as coordenadas de um ponto P são iguais as componentes do vetor OP que vai da origem do sistema de coordenadas ao ponto P. Em particular, o vetor nulo, $\bar{0}$=(0,0,0). Assim, como fizemos para vetores no plano, para vetores no espaço a soma de vetores e a multiplicação de vetor por escalar podem ser realizadas em termos das componentes.
  - Se V = (v1, v2, v3) e W = (w1,w2,w3), então a adição de V com W é dada por V +W = (v1 + w1, v2 + w2, v3 + w3);
- Se V = (v1, v2, v3) e *α é um escalar, então a multiplicação de V por α é dada por α V=(αv1,αv2,αv3).*

Exemplos

- 1 - Se V = (1,-2, 3), W = (2, 4,-1), então
  - V +W = (1+2,-2+4,3+(-1))=(3,2,2),
  - 3V= (3 1,3(-2), 3 3) = (3,-6, 9).
  - Obs.: Quando um vetor V está representado por um segmento orientado com ponto inicial fora da origem, digamos em P = (x_1,y_1,z_1), e ponto final em Q = (x_2,y_2,z_2), então as componentes do vetor V são dadas por V $=\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(x_2- x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.
- 2 - As componentes do vetor V que tem um representante com ponto inicial P = (5/2, 1, 2) e ponto final Q = (0, 5/2, 5/2) são dadas por V $=\overrightarrow{PQ}$= (0 - 5/2, 5/2 - 1, 5/2 - 2) = (-5/2, 3/2, 1/2).

Representação Matricial

- Um vetor no espaço $V=(v_1,v_2,v_3)$ pode também ser escrito na notação matricial como uma **matriz linha ou como uma matriz coluna:** $V = [v1 \quad v2 \quad v3]$ **ou**

$$V = \begin{bmatrix} v1 \\ v2 \\ v3 \end{bmatrix}$$

- Estas notações podem ser justificadas pelo fato de que as operações matriciais

$$V + W = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{bmatrix}, \quad \alpha V = \alpha \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \\ \alpha v_3 \end{bmatrix}$$

ou

$$V + W = [\, v_1 \quad v_2 \quad v_3 \,] + [\, w_1 \quad w_2 \quad w_3 \,] = [\, v_1 + w_1 \quad v_2 + w_2 \quad v_3 + w_3 \,],$$

$$\alpha V = \alpha [\, v_1 \quad v_2 \quad v_3 \,] = [\, \alpha v_1 \quad \alpha v_2 \quad \alpha v_3 \,]$$

Representação Matricial

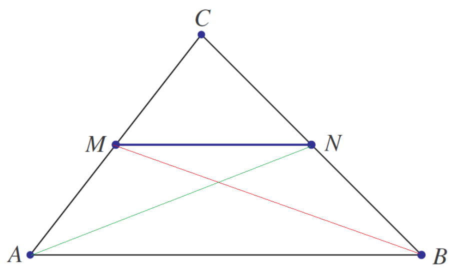
- Produzem os mesmos resultados que as operações vetoriais:
  - $V+W = (v_1,v_2,v_3)+(w_1,w_2,w_3)=(v_1+w_1,v_2+w_2,v_3+w_3)$,
  - $\alpha V = \alpha(v_1, v_2, v_3) = (\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3)$.
- O mesmo vale, naturalmente, para vetores no plano.
- No teorema seguinte enunciamos as propriedades mais importantes da soma de vetores e multiplicação de vetores por escalar.

Teoremas

- Teorema 1 - Sejam U, V e W vetores e α *e* β *escalares. São válidas as seguintes propriedades:*
  - (a) $U + V = V + U$;
  - (b) $(U + V) + W = U + (V + W)$;
  - (c) $U + \vec{0} = U$;
  - (d) $U + (-U) = \vec{0}$;
  - (e) $\alpha(\beta U) = (\alpha\beta) U$;
  - (f) $\alpha(U + V) = \alpha U + \alpha V$;
  - (g) $(\alpha + \beta)U = \alpha U + \beta U$;
  - (h) $1 U = U$.

Exemplos

- Exemplo 3. Seja um triângulo ABC e sejam M e N os pontos médios de AC e BC, respectivamente. Vamos provar que MN é paralelo a AB e tem comprimento igual a metade do comprimento de AB.
- Devemos provar que: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$



Agora, a partir da figura acima temos que:

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN}$.

Como M é ponto médio de AC e N é ponto médio de BC, então

$$\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \quad \overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

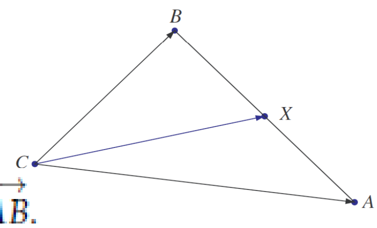
$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

Exemplos

Dados quatro pontos A, B, C e X tais que $\overrightarrow{AX} = \lambda\ \overrightarrow{AB}$, vamos escrever $\overrightarrow{CX}$ como **combinação linear** de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$, isto é, como uma soma de múltiplos escalares de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$.

Como $\overrightarrow{AX} = \lambda\ \overrightarrow{AB}$, então os vetores $\overrightarrow{AX}$ e $\overrightarrow{AB}$ são paralelos e portanto o ponto X só pode estar na reta definida por A e B. Vamos desenhá-lo entre A e B, mas isto não representará nenhuma restrição, como veremos a seguir.

O vetor que vai de C para X, pode ser escrito como uma soma de um vetor que vai de C para A com um vetor que vai de A para X,



$$\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AX}\ .$$

Agora, por hipótese $\overrightarrow{AX} = \lambda\ \overrightarrow{AB}$, o que implica que $\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} + \lambda\ \overrightarrow{AB}$.
Mas, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$, portanto $\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} + \lambda(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})$. Logo,

$$\overrightarrow{CX} = (1-\lambda)\ \overrightarrow{CA} + \lambda\ \overrightarrow{CB}\ .$$

Exemplos

Observe que:

- Se $\lambda = 0$, então $\overrightarrow{CX}=\overrightarrow{CA}$.
- Se $\lambda = 1$, então $\overrightarrow{CX}=\overrightarrow{CB}$.
- Se $\lambda = 1/2$, então $\overrightarrow{CX}= \frac{1}{2}\,\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{CB}$.
- Se $\lambda = 1/3$, então $\overrightarrow{CX}= \frac{2}{3}\,\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\,\overrightarrow{CB}$.
- Se $0 \leq \lambda \leq 1$, então X pertence ao segmento AB, enquanto que se $\lambda < 0$ ou $\lambda > 1$, então X pertence a um dos prolongamentos do segmento AB.

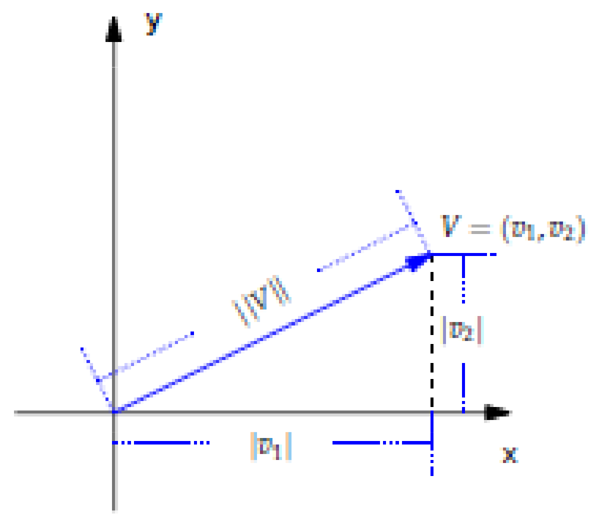
Produtos de Vetores

- Norma e Produto Escalar
- Já vimos que o **comprimento de um vetor V é definido como sendo o comprimento** de qualquer um dos segmentos orientados que o representam.
- O comprimento do vetor V também é chamado de **norma de V e é denotado(a) por ||V||.**
- **Segue do** Teorema de Pitágoras que a norma de um vetor pode ser calculada usando as suas componentes, por $||V|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2},$

no caso em que $V = (v_1, v_2)$ é um vetor no plano, e por

$$||V|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2},$$

no caso em que $V = (v_1, v_2, v_3)$ é um vetor no espaço (verifique usando as Figuras 12 e 13).



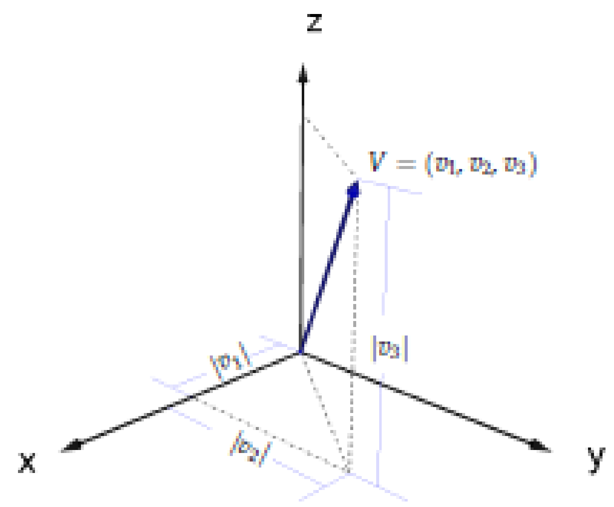


Figura 12 A norma de um vetor V no plano Figura 13 A norma de um vetor V no espaço

Norma

- Um vetor de norma igual á 1 é chamado **vetor unitário.**
- A **distância entre dois pontos P = (x_1, y_1, z_1) e Q = (x_2, y_2, z_2) é igual á norma do** vetor $\overrightarrow{PQ}$. Como

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

então a distância de P a Q é dada por

$$\text{dist}(P, Q) = ||\overrightarrow{PQ}|| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Analogamente, a **distância entre dois pontos** $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ no plano é igual à norma do vetor $\overrightarrow{PQ}$, que é dada por

$$\text{dist}(P, Q) = ||\overrightarrow{PQ}|| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

EXEMPLO

A norma do vetor $V = (1, -2, 3)$ é

$$||V|| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

A distância entre os pontos $P = (2, -3, 1)$ e $Q = (-1, 4, 5)$ é

$$\text{dist}(P, Q) = ||\overrightarrow{PQ}|| = ||(-1-2, 4-(-3), 5-1)|| = ||(-3, 7, 4)||$$

$$= \sqrt{(-3)^2 + 7^2 + 4^2} = \sqrt{74}.$$

Vetor Unitário

Se $V = (v_1, v_2, v_3)$ e α é um escalar, então da definição da multiplicação de vetor por escalar e da norma de um vetor segue-se que

$$||\alpha V|| = ||(\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3)|| = \sqrt{(\alpha v_1)^2 + (\alpha v_2)^2 + (\alpha v_3)^2} = \sqrt{\alpha^2(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)},$$

ou seja,

$$||\alpha V|| = |\alpha|\,||V||.$$

Dado um vetor V **não nulo**, o vetor

$$U = \left(\frac{1}{||V||}\right) V.$$

é um **vetor unitário na direção de** V, pois temos que

$$||U|| = \left|\frac{1}{||V||}\right| ||V|| = 1.$$

EXEMPLO

Um vetor unitário na direção do vetor $V = (1, -2, 3)$ é o vetor

$$U = \left(\frac{1}{||V||}\right) V = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)(1, -2, 3) = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right).$$

O ângulo entre dois vetores não nulos, V e W, é definido pelo ângulo θ determinado por V e W que satisfaz $0 \leq \theta \leq \pi$, quando eles estão representados com a mesma origem .

Quando o ângulo θ entre dois vetores V e W é reto ($\theta = 90^o$), ou um deles é o vetor nulo, dizemos que os vetores V e W são **ortogonais** ou **perpendiculares entre si**.

PRODUTO INTERNO

- O **produto escalar ou interno de dois vetores V e W é definido por:**

$$V \cdot W = \begin{cases} 0, & \text{se } V \text{ ou } W \text{ é o vetor nulo,} \\ ||V||\,||W|| \cos\theta, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

- em que *θ é o ângulo entre eles.*

PRODUTO INTERNO

Quando os vetores são dados em termos das suas componentes não sabemos diretamente o ângulo entre eles. Por isso, precisamos de uma forma de calcular o produto escalar que não necessite do ângulo entre os vetores.

Se V e W são dois vetores não nulos e θ é o ângulo entre eles, então pela lei dos cossenos,

$$||V - W||^2 = ||V||^2 + ||W||^2 - 2||V||\,||W|| \cos\theta.$$

Assim,

$$V \cdot W = ||V||\,||W|| \cos\theta = \frac{1}{2}\left(||V||^2 + ||W||^2 - ||V - W||^2\right). \tag{3.6}$$

Já temos então uma fórmula para calcular o produto escalar que não depende diretamente do ângulo entre eles. Substituindo-se as coordenadas dos vetores em (3.6) obtemos uma expressão mais simples para o cálculo do produto interno.

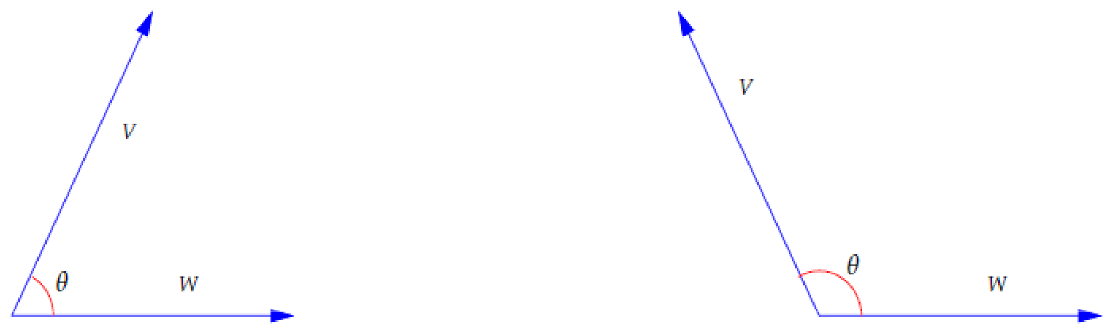


Figura 14 Ângulo entre dois vetores, agudo (à esquerda) e obtuso (à direita)

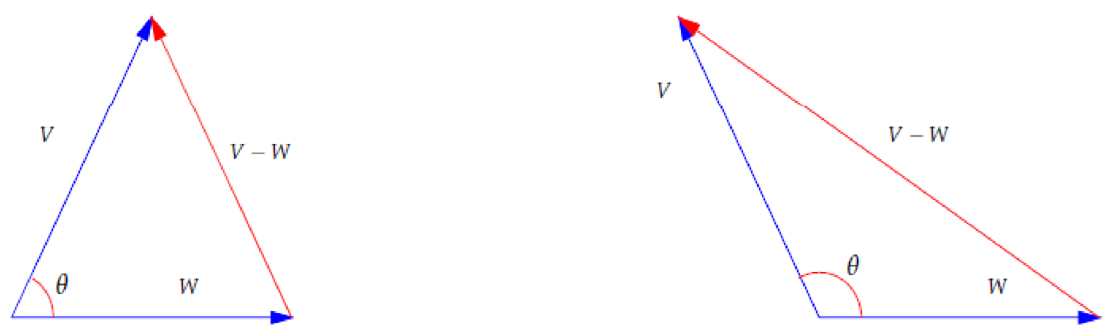


Figura 15 Triângulo formado por representantes de V, W e $V - W$. À esquerda o ângulo entre V e W é agudo e à direita é obtuso.

TEOREMA

$V = (v_1, v_2, v_3)$ e $W = (w_1, w_2, w_3)$ são vetores no espaço, então substituindo-se

$||V||^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2,$

$||W||^2 = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2$

$||V - W||^2 = (v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2 + (v_3 - w_3)^2$

em (3.6) os termos v_i^2 e w_i^2 são cancelados e obtemos

$V \cdot W = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3.$

O produto escalar ou interno, $V \cdot W$, entre dois vetores é dado por

$$V \cdot W = v_1 w_1 + v_2 w_2,$$

se $V = (v_1, v_2)$ e $W = (w_1, w_2)$ são vetores no plano e por

$$V \cdot W = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3,$$

se $V = (v_1, v_2, v_3)$ e $W = (w_1, w_2, w_3)$ são vetores no espaço.

EXEMPLO

Sejam $V = (0, 1, 0)$ e $W = (2, 2, 3)$. O produto escalar de V por W é dado por

$$V \cdot W = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 = 2.$$

- Podemos usar o Teorema 3.2 para determinar o ângulo entre dois vetores não nulos, V e W. O cosseno do ângulo entre V e W é, então, dado por

$$\cos\theta = \frac{V \cdot W}{||V||\,||W||}.$$

Se V e W são vetores não nulos e θ é o ângulo entre eles, então

(a) θ é agudo ($0 \leq \theta < 90^o$) se, e somente se, $V \cdot W > 0$,

(b) θ é reto ($\theta = 90^o$) se, e somente se, $V \cdot W = 0$ e

(c) θ é obtuso ($90^o < \theta \leq 180^o$) se, e somente se, $V \cdot W < 0$.

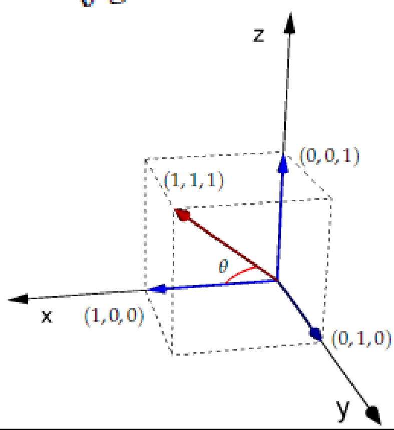
Exemplo

- Vamos determinar o ângulo entre uma diagonal de um cubo e uma de suas arestas. Sejam $V_1 = (1, 0, 0)$, $V_2 = (0, 1, 0)$ e $V_3 = (0, 0, 1)$. Uma diagonal do cubo é representada pelo vetor D dado por $D = V_1 + V_2 + V_3 = (1, 1, 1)$.
- Então o ângulo entre D e V_1 satisfaz

$$\cos\theta = \frac{D \cdot V_1}{||D||\,||V_1||} = \frac{1.1 + 0.1 + 0.1}{(\sqrt{1^2+1^2+1^2})(\sqrt{1^2+0^2+0^2})} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ou seja,

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 54^o\,.$$

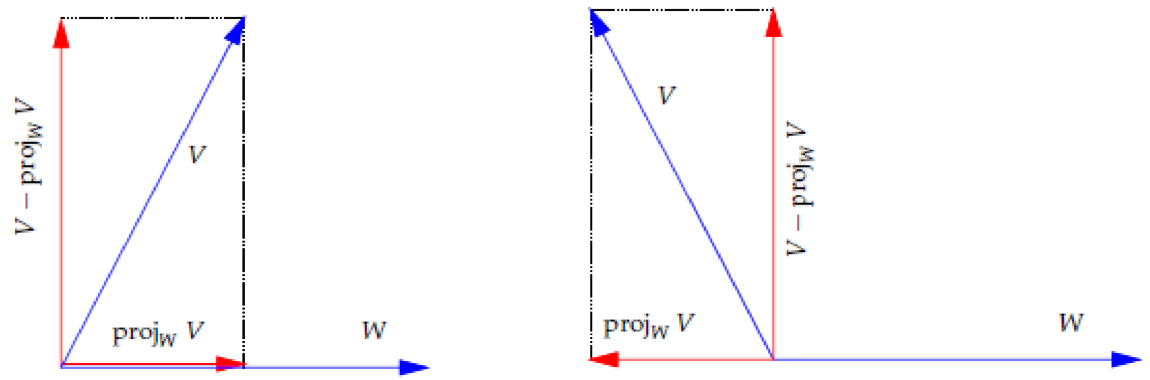


Teorema

- Sejam U,V e W vetores e α *um escalar. São válidas as seguintes propriedades:*
- (a) (comutatividade) U.V = V.U ;
- (b) (distributividade) U.(V +W) = U.V + U.W;
- (c) (associatividade) $\alpha(U.V) = (\alpha U).V = U.(\alpha V)$;
- (d) $V.V = ||V||^2 \geq 0$, para todo V e V.V = 0 se, e somente se, $V = \vec{0}$.

Projeção Ortogonal

- Dados dois vetores V e W a **projeção ortogonal de V sobre W** denotada **por proj** $_{W}$ ^{V}
- é o vetor que é paralelo a W tal que V - proj$_W$ ^{V} seja ortogonal a W



Projeção ortogonal do vetor V sobre o vetor W

Proposição

- Seja W um vetor não nulo. Então, a projeção ortogonal de um vetor V em W é dada por

$$\text{proj}_W V = \left(\frac{V \cdot W}{||W||^2}\right) W.$$

Exemplo: Sejam V = (2,-1, 3) e W = (4,-1, 2). Vamos encontrar dois vetores V_1 e V_2 tais que $V = V_1 + V_2$, V_1 é paralelo α.W e V_2 é perpendicular α.W. Temos que
V.W = 2. 4 + (-1)(-1) + 3 2 = 15

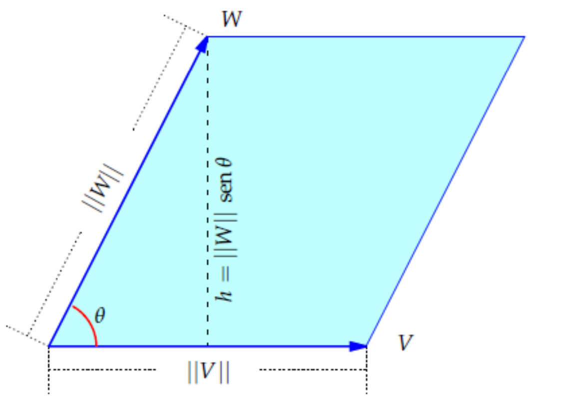
$$||W||^2 = 4^2 + (-1)^2 + 2^2 = 21.$$

$$V_1 = \text{proj}_W V = \left(\frac{V \cdot W)}{||W||^2}\right) W = \left(\frac{15}{21}\right)(4, -1, 2) = (\frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7})$$

$$V_2 = V - V_1 = (2, -1, 3) - (\frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7}) = (-\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{11}{7}).$$

Produto Vetorial

- Vamos, agora, definir um produto entre dois vetores, cujo resultado é um vetor.
- Por isso, ele é chamado **produto vetorial.**
- **Este produto tem aplicação, por exemplo, em** Física:
  - A força exercida sobre uma partícula com carga unitária mergulhada num campo magnético uniforme é o produto vetorial do vetor velocidade da partícula pelo vetor campo magnético.



Área de um paralelogramo determinado por dois vetores

Definição

- Sejam V e W dois vetores no espaço. Definimos o **produto vetorial, V x W, como sendo o vetor** com as seguintes características:
- (a) Tem comprimento dado numericamente por
  - ||V x W|| = ||V||.||W|| sen θ,
  - ou seja, a norma de V x W é numericamente igual à área do paralelogramo determinado por V e W.
- (b) Tem direção perpendicular a V e a W.
- (c) Tem o sentido dado pela regra da mão direita: Se o ângulo entre V e W é θ, *giramos o* vetor V de um ângulo θ *até que coincida com W e acompanhamos este movimento com os dedos da mão* direita, então o polegar vai apontar no sentido de V x W.

Regra da mão direita

Teorema

- Da forma como definimos o produto vetorial é difícil o seu cálculo, mas as propriedades que apresentaremos a seguir possibilitarão obter uma f órmula para o produto vetorial em termos das componentes dos vetores.
- Sejam U,V e W vetores no espaço e α *um escalar. São válidas as seguintes propriedades:*

  (a) V x W = - (W x V) (anti-comutatividade).

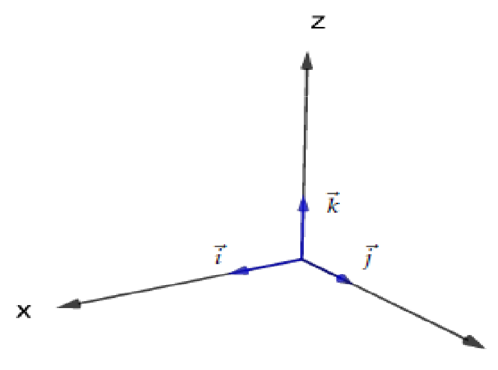
  (b) V x W = $\vec{0}$ se, e somente se, V = αW *ou* $W = \alpha V$.

  (c) (V x W) . V = (V x W) . W = 0.

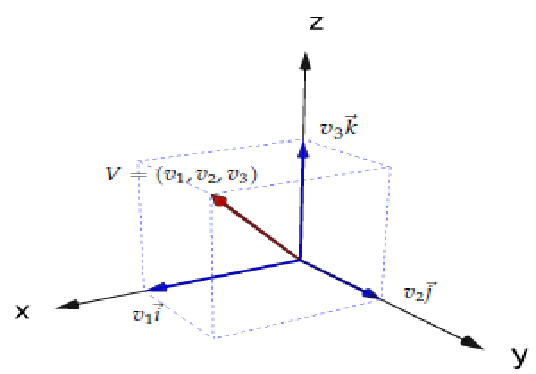
  (d) $\alpha(V \times W) = (\alpha V) \times W = V \times (\alpha W)$.

  (e) V x (W + U) = V x W + V x U e (V +W) x U = V x U +W x U (Distributividade em relação a soma de vetores).

Produto Vetorial



Vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$



$V = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$

- Da definição de produto vetorial podemos obter facilmente as seguintes relações:

$$\vec{i}\times\vec{i}=\bar{0},\quad \vec{j}\times\vec{j}=\bar{0},\quad \vec{k}\times\vec{k}=\bar{0},$$
$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},$$
$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\quad \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\quad \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}.$$

Agora, estamos prontos para obter uma fórmula que dê o produto vetorial de dois vetores em termos das suas componentes.

Teorema

- Sejam V = (v_1, v_2, v_3) e W = (w_1,w_2,w_3) vetores no espaço. Então o produto vetorial V x W é dado por

$$V \times W = \left(\det\begin{bmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{bmatrix}, -\det\begin{bmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{bmatrix}, \det\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix}\right)$$

Para obter as componentes do produto vetorial V W procedemos como se segue:

Escreva a matriz: $\begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$

Para calcular a primeira componente de V x W, elimine a primeira coluna da matriz acima e calcule o determinante da sub-matriz resultante.
A segunda componente é obtida, eliminando-se a segunda coluna e calculando-se o determinante da sub-matriz resultante com o sinal trocado.
A terceira é obtida como a primeira, mas eliminando-se a terceira coluna.

Exemplo

- Sejam V = $\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ e W = $3\vec{i} + \vec{k}$. Vamos determinar o produto

vetorial $V \times W$. Como

$$\begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

então

$$V \times W = \left(\det\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, -\det\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\right) = (2, -7, -6).$$

Usando os vetores $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$ o produto vetorial $V \times W$, pode ser escrito em termos do "determinante"

$$V \times W = \det\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{bmatrix}\vec{i} - \det\begin{bmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{bmatrix}\vec{j} + \det\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix}\vec{k}.$$

Produto Misto

- O produto (V x W) . U é chamado **produto misto de U, V e W.**
- **O resultado abaixo** mostra como calcular o produto misto usando as componentes dos vetores
- Teorema: Sejam U = $u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$, V = $v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ e W = $w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k}$. Então,

$$(V \times W) \cdot U = \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}$$

Exemplo

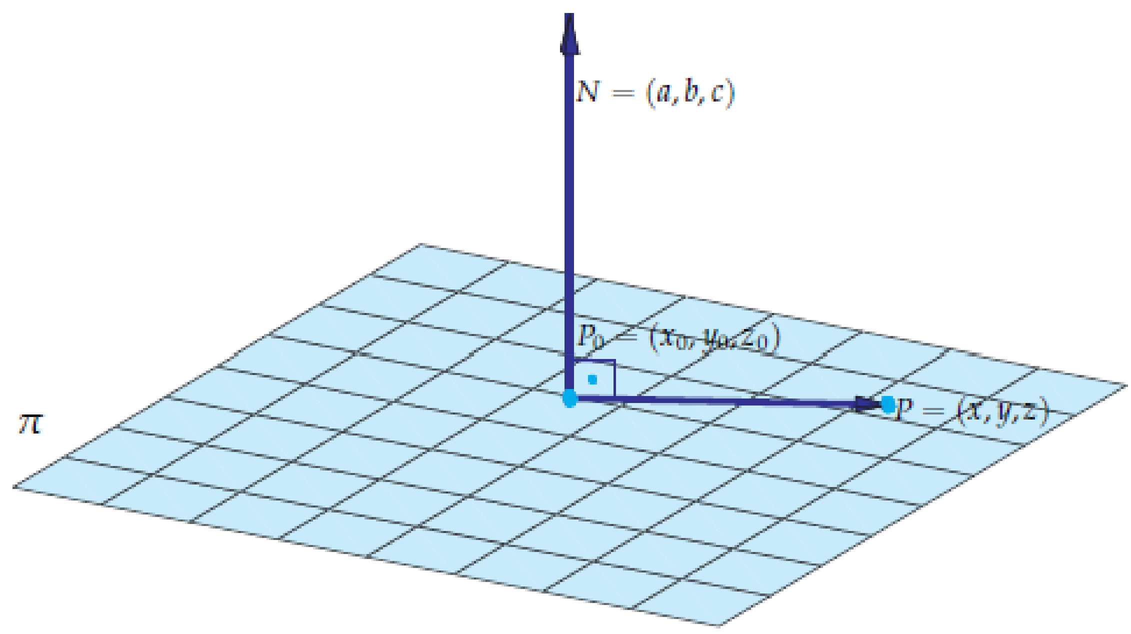
O produto misto dos vetores $U = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $V = -\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$ e $W = 5\vec{i} + \vec{i} - 2\vec{k}$ é

$$(V \times W) \cdot U = \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} = -84.$$

Equações dos Planos e Retas

- Equação do Plano
  - No plano a equação geral de uma reta é $ax+by+c=0$.
  - No espaço um plano é o conjunto dos pontos $P=(x,y,z)$ que satisfazem a equação $ax+by+cz+d=0$, para $a, b, c, d \in \Re$
  - É chamada **equação geral do plano.**
  - **Existe uma analogia entre uma reta no** plano e um plano no espaço.
    - No plano, a equação de uma reta é determinada se forem dados sua inclinação e um de seus pontos.
    - No espaço, a inclinação de um plano é caracterizada por um vetor perpendicular a ele, chamado **vetor normal ao plano e a equação de um plano é determinada se são dados um vetor normal e um** de seus pontos.

Plano perpendicular a $N = (a, b, c)$ e que passa por $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$



Proposição

- A equação geral de um plano π que passa por um ponto $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ e tem vetor normal $N=(a,b,c)$ é $ax+by+cz+d = 0$, (4.1) em que $d=-(ax_0+by_0+cz_0)$.
- Demonstração:

Um ponto $P = (x, y, z)$ pertence ao plano π se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ for perpendicular ao vetor N, ou seja,

$$N \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0. \tag{4.2}$$

Como, $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, a equação (4.2) pode ser reescrita como

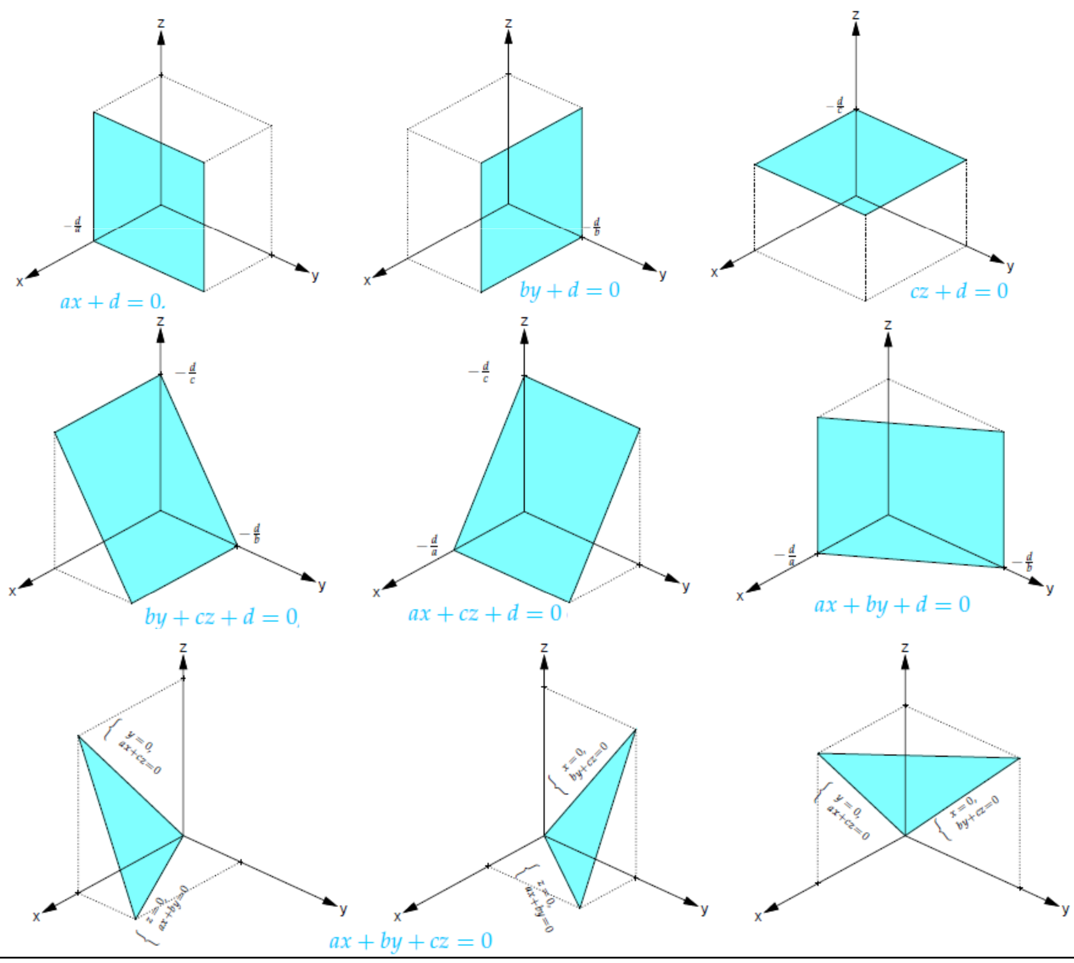
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

ou seja,

$$ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0.$$

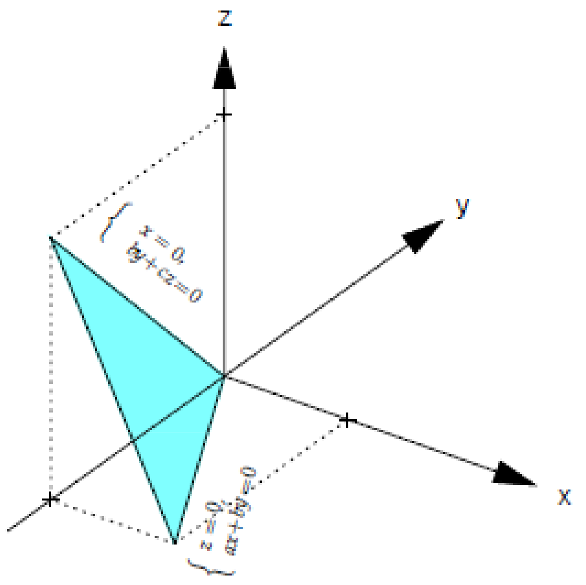
Planos Básicos

Planos

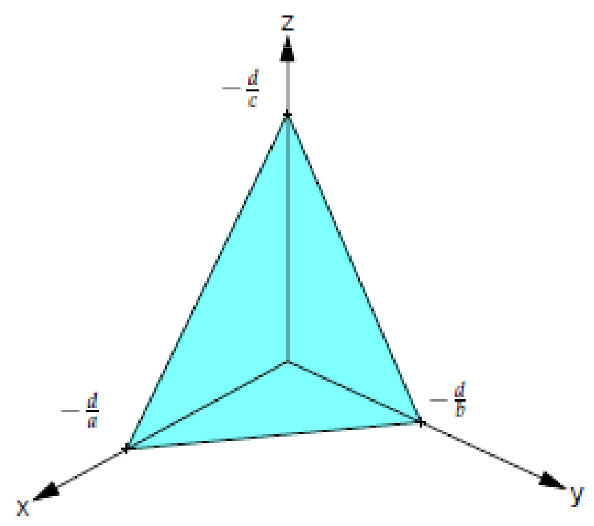


Planos Básicos

Planos



$ax + by + cz = 0$



$ax + by + cz + d = 0$

Exemplo

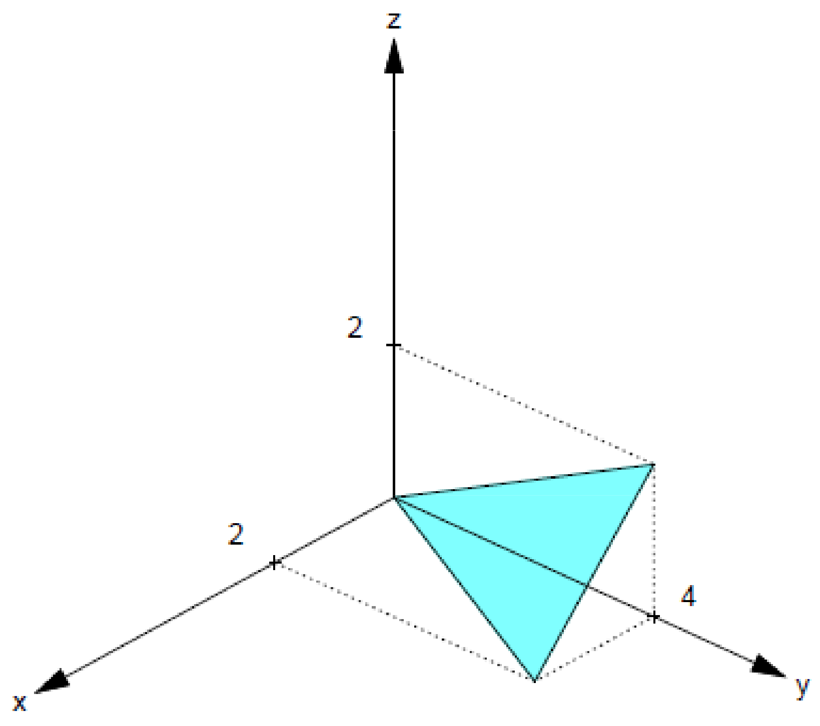
- Vamos encontrar a equação do plano π *que passa pelo ponto* $P_0=(1,-2,-2)$ e é perpendicular ao vetor $N=(2,-1, 2)$.
- *Solução:*

  Da Proposição 4.1, a equação do plano é da forma: $ax + by + cz + d = 0$, em que os coeficientes de x, y e z são as componentes do vetor normal, ou seja, $a=2$, $b=-1$ e $c=2$. Assim, a equação de π *é da forma* $2x-y+2z+d=0$.

  Para determinar o coeficiente d, ao invés de usarmos a Proposição 4.1, vamos usar o fato de que $P_0=(1,-2,-2)$ pertence a π. *Mas, o ponto* P_0 *pertence a* π *se, e somente se*, as suas coordenadas satisfazem a equação de π, *ou seja*, $2.1 – 1.(-2) + 2.(-2) + d = 0$.

  Logo, $d=2+2-4=0$. Substituindo-se d = 0 na equação anterior do plano obtemos que a equação do plano π *é* $2x - y + 2z = 0$.

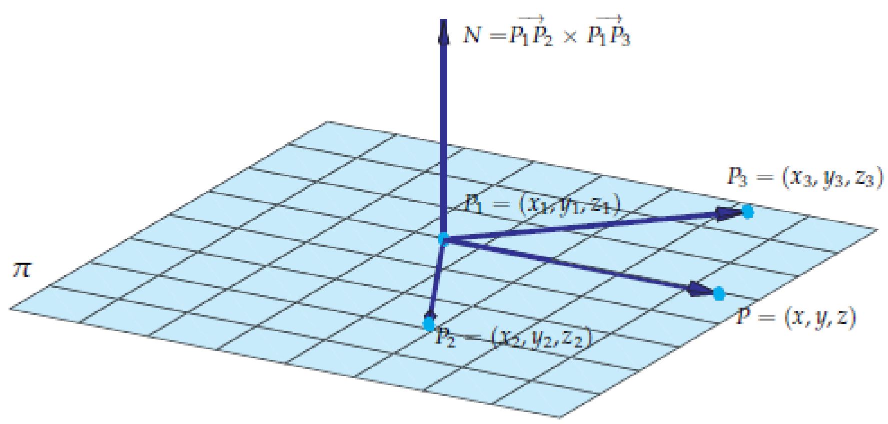
Exemplo



Plano $2x - y + 2z = 0$

Equações de Retas e Planos

- No plano, a equação de uma reta é determinada se forem dados dois pontos da reta.
- Analogamente, no espaço, a equação de um plano é determinada se são dados três pontos P_1, P_2 e P_3 não colineares (isto é, não pertencentes a uma mesma reta). Com os três pontos podemos "formar" os vetores $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$.



Plano que passa por três pontos

Exemplo

Vamos encontrar a equação do plano π que passa pelos pontos $P_1 = (\frac{1}{2}, 0, 0)$, $P_2 = (0, \frac{1}{2}, 0)$ e $P_3 = (0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Com os três pontos podemos "formar" os vetores $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$. O vetor

$$N = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) \times (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$$

é um vetor normal ao plano. Assim, a equação do plano é da forma

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z + d = 0,$$

em que os coeficientes de x, y e z são as componentes do vetor N. Para determinar o coeficiente d, vamos usar o fato de que o ponto $P_1 = (\frac{1}{2}, 0, 0)$ pertence ao plano π. Mas, o ponto P_1 pertence a π se, e somente se, as suas coordenadas satisfazem a equação de π, ou seja,

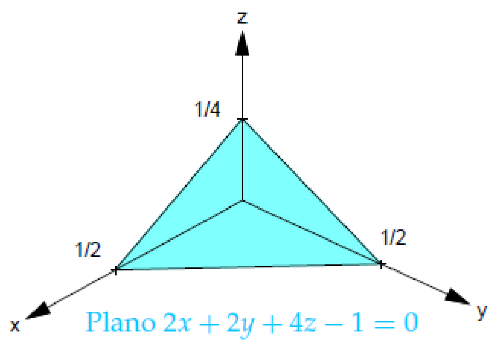
$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 + d = 0\,.$$

Logo, $d = \frac{1}{8}$. Finalmente, uma equação do plano π é

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z - \frac{1}{8} = 0$$

ou multiplicando por 8, obtemos

$$2x + 2y + 4z - 1 = 0.$$



Exemplo - Outra alternativa

- Podemos encontrar a equação do plano da seguinte forma. Como vimos anteriormente, três vetores, $\overrightarrow{P_1P}$ $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$, são coplanares se, e somente se, o produto misto entre eles é zero.
- Assim, um ponto *P=(x, y, z)* pertence a π *se, e somente se,* $\overrightarrow{P_1P}.(\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3})=0$.

Mas,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_1P} &= (x - \frac{1}{2}, y, z) \\ \overrightarrow{P_1P_2} &= (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) \\ \overrightarrow{P_1P_3} &= (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Então,

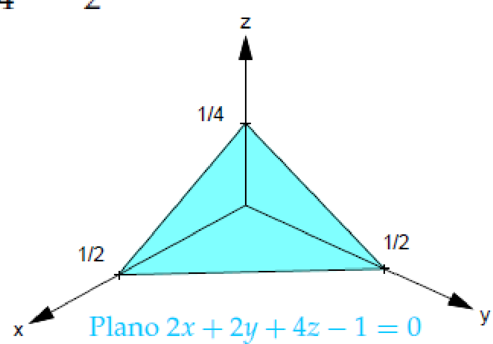
$$\det \begin{bmatrix} x - \frac{1}{2} & y & z \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{4}(x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z$$

e assim a equação do plano é dada por

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z - \frac{1}{8} = 0.$$

ou multiplicando por 8,

$$2x + 2y + 4z - 1 = 0$$



Observação

- A equação do plano também é determinada se ao invés de serem dados três pontos, forem dados um ponto P_1 do plano e dois vetores paralelos ao plano, $V=(v_1, v_2, v_3)$ e $W=(w_1,w_2,w_3)$, desde que eles sejam não paralelos. Ou ainda se forem dados dois pontos P_1 e P_2 do plano e um vetor paralelo ao plano $V=(v_1, v_2, v_3)$, já que neste caso podemos formar o vetor $W=\overrightarrow{P_1P_2}=(w_1,w_2,w_3)$ que é também paralelo ao plano.
- Nestes casos temos novamente pelo menos duas maneiras de encontrarmos a equação do plano.
  - Uma delas é observando que o vetor $N=V\times W$ é um vetor normal ao plano. Desta forma temos um ponto do plano e um vetor normal ao plano.
  - A outra é observando que temos três vetores paralelos ao plano:
    - $\overrightarrow{P_1P}=(x-x_1,y-y_1,z-z_1)$, V e W. Como vimos anteriormente, os três vetores são coplanares se, e somente se, o produto <u>misto</u> entre eles for zero, ou seja,

$$\overrightarrow{P_1P}\cdot(V\times W)=\det\begin{bmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}=0.$$

Equações Paramétricas

- Além da equação geral do plano podemos também caracterizar os pontos de um plano da seguinte forma. Considere um plano π*, um ponto* $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ pertencente a π *e dois vetores* $V=(v_1,v_2,v_3)$ *e* $W=(w_1,w_2,w_3)$ *não colineares,* paralelos a π*. Um ponto* $P = (x, y, z)$ *pertence a* π *se, e somente se, o vetor* $P_0P=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ é uma combinação linear de V e W, ou seja, se existem escalares t e s tais que $P_0P= tV + sW$. (4.4)
- Escrevendo em termos de componentes (4.4) pode ser escrito como $(x-x_0,y-y_0,z-z_0) = (tv_1+sw_1,tv_2+sw_2,tv_3+sw_3)$.
- Logo um ponto $P=(x,y,z)$ pertence a π *se, e somente se, satisfaz as equações:*

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & = & x_0 & + & v_1\,t & + & w_1\,s \\ y & = & y_0 & + & v_2\,t & + & w_2\,s \\ z & = & z_0 & + & v_3\,t & + & w_3\,s \end{array}\right. \quad \text{para } t, s \in \mathbb{R}.$$

Estas equações são chamadas **equações paramétricas do plano.**

Exemplo

Podemos obter equações paramétricas do plano do exemplo anterior usando o fato de que ele passa pelo ponto $P_1 = (1/2, 0, 0)$ e é paralelo aos vetores $\overrightarrow{P_1P_2} = (-1/2, 1/2, 0)$, $\overrightarrow{P_1P_3} = (-1/2, -1/2, 1/2)$. Assim,

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}s \\ y = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}s \\ z = \frac{1}{2}s \end{cases} \quad \text{para } t, s \in \mathbb{R}.$$

Equações da Reta

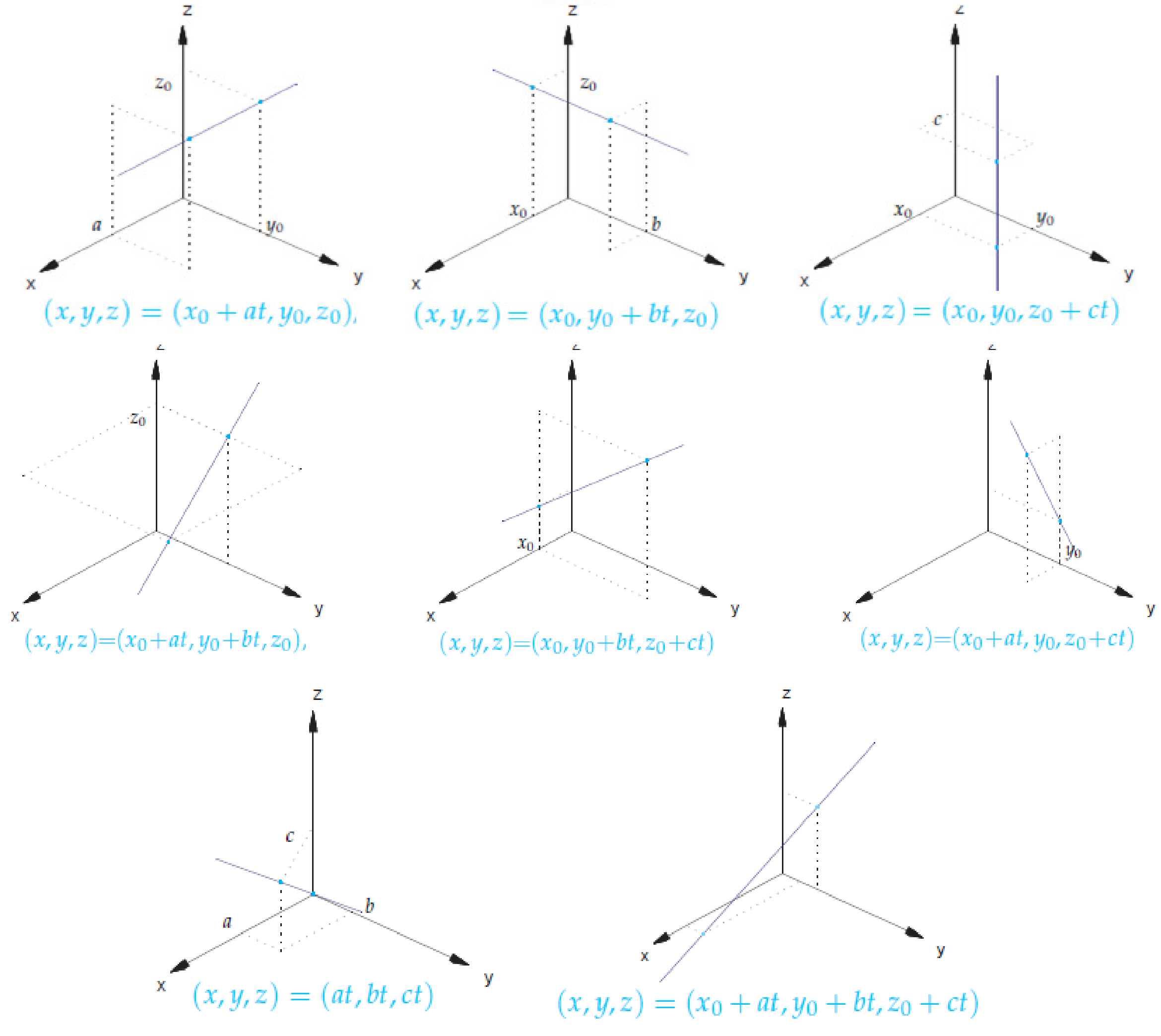
- **<u>Equações Paramétricas</u>**
- Vamos supor que uma reta *r* seja paralela a um vetor $V=(a,b,c)$ não nulo e que passe por um ponto $P_0=(x_0,y_0,z_0)$. Um ponto $P=(x,y,z)$ pertence a reta *r* se, e somente se, o vetor P_0P é paralelo ao vetor V, isto é, se o vetor P_0P é um múltiplo escalar de V, ou seja, $P_0P= t\,V$. (4.5)
- Em termos de componentes, a equação (4.5) pode ser escrita como $(x-x_0, y-y_0, z-z_0)=(ta, tb, tc)$.
- Logo, $x-x_0=t.a$, $y-y_0=t.b$ e $z-z_0=t.c$. Ou seja, a reta *r* pode ser descrita como sendo o conjunto dos pontos P=(x,y,z) tais que

$$\begin{cases} x = x_0 + t\,a \\ y = y_0 + t\,b, \\ z = z_0 + t\,c \end{cases} \quad \text{para } t \in \mathbb{R}. \qquad (4.6)$$

As equações acima são chamadas de **equações paramétricas da reta. A reta *r* que** passa por um ponto $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ e é paralela ao vetor V=(a,b,c), esse é chamado **vetor diretor da reta *r*.**

- O parâmetro t nas equações (4.6) pode ser interpretado como o instante de tempo, se o ponto $P=(x,y,z)$ descreve o movimento de uma partícula em movimento retilíneo uniforme com vetor velocidade $V=(a,b,c)$. Observe que:
  - para $t = 1$, $P = (x, y, z) = (x_0+a, y_0+b, z_0+c)$,
  - para $t = 2$, $P = (x, y, z) = (x_0+2a, y_0+2b, z_0+2c)$
  - e assim por diante.
- As equações (4.6), podem ser reescritas como $(x,y,z)=(x_0+at, y_0+bt, z_0+ct)$, que é chamada **equação vetorial da reta *r*.**

Retas



Exemplo

A reta que passa por $P_0 = (-3, 3/2, 4)$ e é paralela ao vetor $V = (-6, 1, 4)$ tem equações paramétricas

$$r : \begin{cases} x = -3 - 6\,t \\ y = \frac{3}{2} + t \\ z = 4 + 4t \end{cases} \quad \text{para } t \in \mathbb{R}$$

Podemos encontrar a interseção da reta r com os planos coordenados xy, yz e xz. A equação do plano xy é $z = 0$, do plano yz é $x = 0$ e do plano xz é $y = 0$. Substituindo $z = 0$ nas equações de r, obtemos $t = -1$, $x = 3$ e $y = 1/2$, ou seja,

- o ponto de interseção de r com o plano xy é

$$(x, y, z) = (3, \frac{1}{2}, 0).$$

De forma análoga obtemos

- o ponto de interseção de r com o plano yz é

$$(x, y, z) = (0, 1, 2),$$

- o ponto de interseção de r com o plano xz

$$(x, y, z) = (6, 0, -2).$$

Equações na Forma Simétrica

- Se todas componentes do vetor diretor da reta *r* são não nulos, podemos resolver cada equação em (4.6) para t e igualar os resultados obtendo o que chamamos de **equações na forma simétrica de r:**

$$\begin{cases} x = x_0 + t\,a \\ y = y_0 + t\,b, \\ z = z_0 + t\,c \end{cases} \quad \text{para } t \in \mathbb{R}.$$

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Exemplos

Exemplo 1: Vamos encontrar as equações paramétricas da reta r que passa pelos pontos $P_1 = (3, 0, 2)$ e $P_2 = (0, 3, 3)$. O vetor

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (0-3, 3-0, 3-2) = (-3, 3, 1)$$

é paralelo a r e o ponto $P_1 = (3, 0, 2)$ pertence a r. Portanto, as equações paramétricas de r são

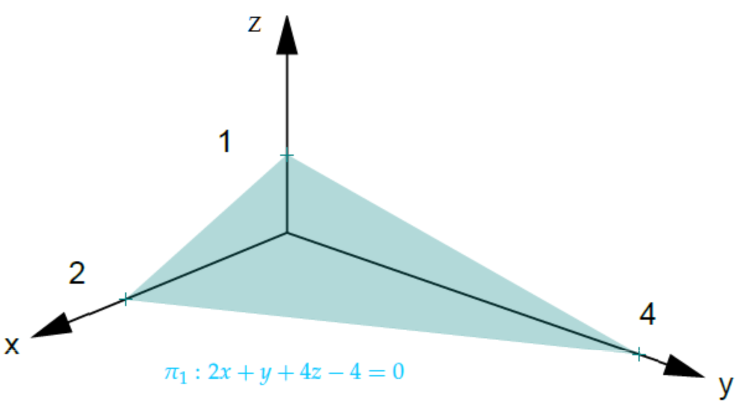
$$\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = 3t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad \text{para } t \in \mathbb{R}.$$

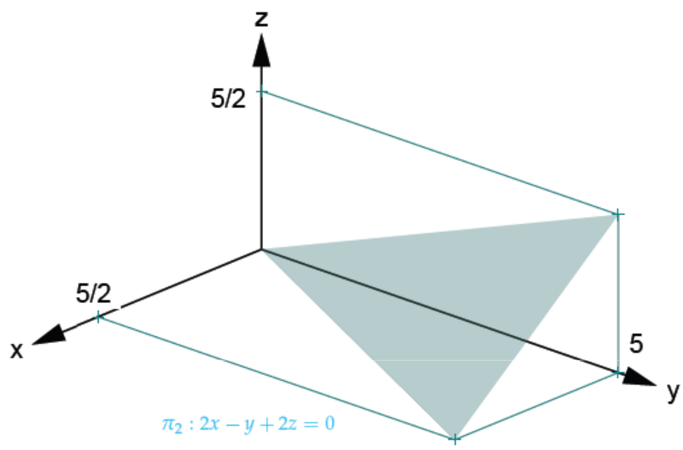
Exemplo 2: Vamos encontrar as equações paramétricas da reta r, interseção dos planos

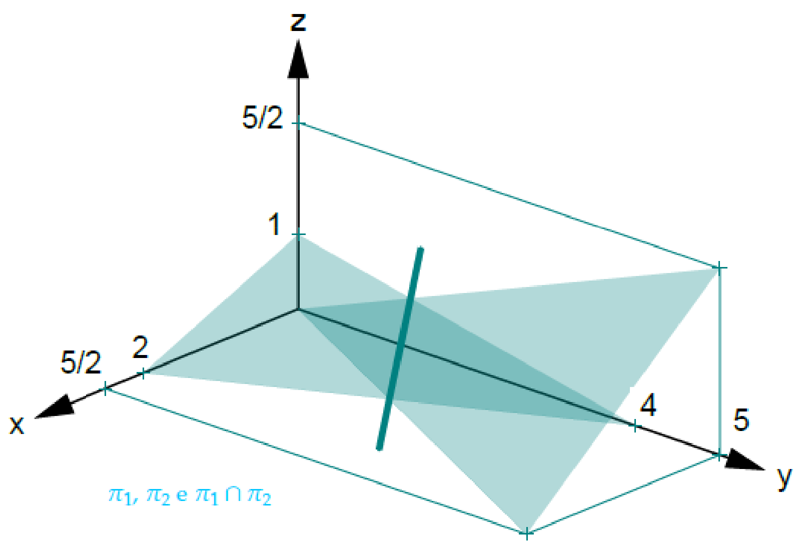
$$\begin{aligned} \pi_1 &: \; 2x + y + 4z - 4 = 0 \\ \pi_2 &: \; 2x - y + 2z = 0. \end{aligned}$$

Vetores normais destes planos são

$N_1 = (2, 1, 4)$ e $N_2 = (2, -1, 2)$.







A reta *r* está contida em ambos os planos, portanto é perpendicular a ambos os vetores normais. Assim, a reta *r* é paralela ao produto vetorial N1xN2

$$N_1 \times N_2 = \left(\det\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, -\det\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\right) = (6, 4, -4).$$

Assim, *V = N1 x N2 = (6, 4,-4)* é um vetor diretor de r. Agora, precisamos encontrar um ponto da reta *r*. Este ponto é uma solução particular do sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & + & 4z & - & 4 = 0 \\ 2x & - & y & + & 2z & & = 0 \end{array}\right. \tag{4.7}$$

Para encontrar uma solução particular do sistema, atribuímos um valor a uma das incógnitas (neste exemplo podemos fazer x = 0) e resolvemos o sistema obtido, que é de duas equações e duas incógnitas

$$\left\{\begin{array}{ccccc} y & + & 4z & - & 4 = 0 \\ -y & + & 2z & & = 0 \end{array}\right.$$

Obtemos então, *y = 4/3* e *z = 2/3*, ou seja, o ponto P_0*=(0, 4/3, 2/3)* é um ponto da reta *r*, pois é uma solução particular do sistema (4.7). Assim, as equações paramétricas de *r* são

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 6t \\ y & = & 4/3+4t \\ z & = & 2/3-4t \end{array}\right. \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{4.8}$$

Exemplo

Achar as equações da reta r_3 que intercepta as retas

$$r_1 : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -1+2t \\ y & = & 1+t, \\ z & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}$$

e $\quad r_2 : x - 2 = \dfrac{y-4}{2} \quad$ e $\quad z = 3 \quad$ e é perpendicular a ambas.

Um ponto qualquer da reta r_1 é descrito por $P_{r_1} = (-1+2t, 1+t, 0)$ e um ponto qualquer da reta r_2 é da forma $P_{r_2} = (2+s, 4+2s, 3)$. Aqui é necessário o uso de um parâmetro diferente para a reta r_2. O vetor $\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (3+s-2t, 3+2s-t, 3)$ "liga" um ponto qualquer de r_1 a um ponto qualquer de r_2. Vamos determinar t e s tais que o vetor $\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}$ seja perpendicular ao vetor diretor $V_1 = (2,1,0)$ de r_1 e ao vetor diretor $V_2 = (1,2,0)$ de r_2, ou seja, temos que resolver o sistema

$$\left\{\begin{array}{lclcl} \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} \cdot V_1 & = & 9+4s-5t & = & 0 \\ \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} \cdot V_2 & = & 9+5s-4t & = & 0 \end{array}\right.$$

A solução deste sistema é $t = 1$, $s = -1$. Logo $P_{r_1} = (1,2,0)$, $P_{r_2} = (1,2,3)$ e $V_3 = \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (0,0,3)$. Assim, as equações paramétricas da reta procurada são

$$r_3 : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1 \\ y & = & 2, \\ z & = & 3t \end{array}\right. \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

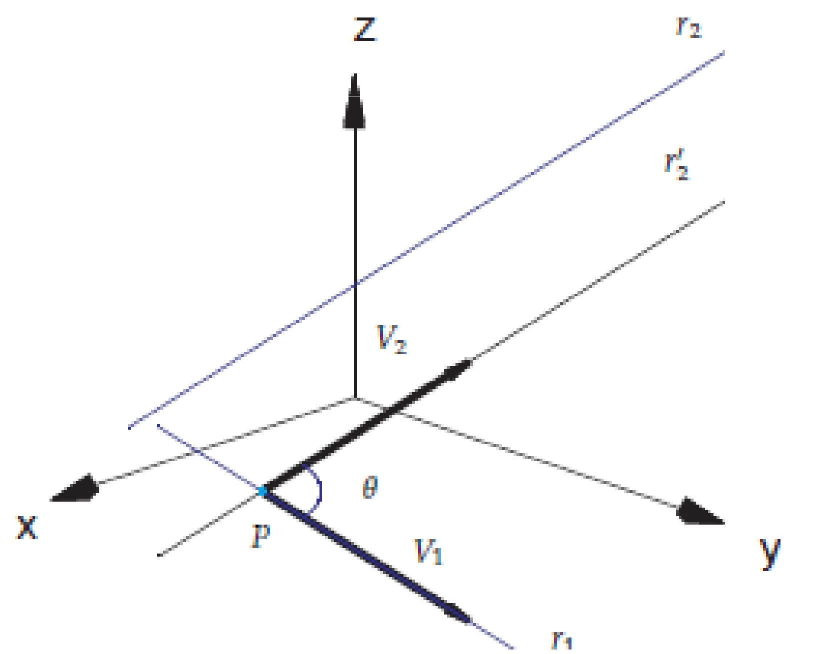
Esta solução usou o fato de que as retas são reversas, isto é, elas não são paralelas, mas também não se interceptam. Como seria a solução se elas se interceptassem?

Ângulos e Distâncias

- <u>Ângulo entre Retas</u>
- Com duas retas no espaço pode ocorrer um dos seguintes casos:
  - As retas se interceptam em um ponto, ou seja, são **concorrentes;**
  - As retas são paralelas (ou coincidentes);
  - As retas são **reversas, isto é, não são paralelas mas também não se interceptam.**
- Se as retas se interceptam, então elas determinam quatro ângulos, dois a dois opostos pelo vértice. O ângulo entre elas é definido como sendo o menor destes ângulos.
- Se as retas r_1 e r_2 são reversas, então por um ponto P de r_1 passa um reta r'_2 que é paralela a r_2. O ângulo entre r_1 e r_2 é definido como sendo o ângulo entre r_1 e r'_2
- Se as retas são paralelas o ângulo entre elas é igual `a zero.
- Em qualquer dos casos, se V_1 e V_2 são vetores paralelos a r_1 e r_2 respectivamente, então o cosseno do ângulo entre elas é $cos(r1, r2) = |\cos\theta|$, em que θ é o ângulo entre V_1 e V_2.
- Lembrando que da definição de produto escalar, podemos encontrar o cosseno do ângulo entre dois vetores, ou seja,

$$\cos\theta = \frac{V_1 \cdot V_2}{||V_1||\,||V_2||}$$

Gráfico



O Ângulo entre duas retas reversas r_1 e r_2

Proposição

Sejam duas retas

$$r_1 : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x_1 + t\,a_1 \\ y & = & y_1 + t\,b_1 \\ z & = & z_1 + t\,c_1 \end{array} \right. \qquad r_2 : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x_2 + t\,a_2 \\ y & = & y_2 + t\,b_2 \\ z & = & z_2 + t\,c_2 \end{array} \right. \quad \textit{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

O cosseno do ângulo entre r_1 e r_2 é

$$\cos(r_1, r_2) = |\cos\theta| = \frac{|V_1 \cdot V_2|}{||V_1||\;||V_2||},$$

em que $V_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $V_2 = (a_2, b_2, c_2)$.

Exemplo

Encontrar o ângulo entre a reta

$$r_1 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & - & z & + & 1 & = & 0 \\ 2x & - & y & + & z & & & = & 0 \end{array} \right.$$

e a reta

$$r_2 : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 2\,t \\ y & = & 1 - t \\ z & = & 2 + 3\,t \end{array} \right. \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Vamos encontrar vetores paralelos a estas retas. A reta r_1 é dada como a interseção de dois planos, portanto o produto vetorial dos vetores normais dos dois planos é paralelo a r_1.

$$N_1 = (1, 1, -1),$$
$$N_2 = (2, -1, 1),$$

$$V_1 = N_1 \times N_2 = \left(\det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \right) = (0, -3, -3)$$

é paralelo a r_1 e $V_2 = (2, -1, 3)$ é paralelo a r_2. Assim,

$$\begin{aligned} \cos(r_1, r_2) &= \frac{|V_1 \cdot V_2|}{||V_1||\;||V_2||} = \frac{|0 \cdot 2 + (-3)(-1) + (-3) \cdot 3|}{\sqrt{0^2 + (-3)^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} \\ &= \frac{|-6|}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{7}}. \end{aligned}$$

Portanto, o ângulo entre r_1 e r_2 é

$$\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right) \approx 67^{\circ}.$$

Ângulo entre Plano

- Sejam p_1 *e* p_2 *dois planos com vetores normais* $N_1=(a_1,b_1,c_1)$ *e* $N_2=(a_2,b_2,c_2)$, respectivamente. O ângulo entre p_1 *e* p_2 *é definido como o ângulo entre duas retas* perpendiculares a eles. Como toda reta perpendicular a p_1 *tem* N_1 *como vetor diretor* e toda reta perpendicular a p_2 *tem* N_2 *como vetor diretor, então o cosseno do* ângulo entre eles é dado por $\cos(p_1, p_2) = |\cos\theta|$, em que θ *é o ângulo entre os vetores normais* N_1 e N_2 *de* p_1 *e* p_2, *respectivamente.*
- Portanto, o cosseno do ângulo entre p_1 *e* p_2 é:

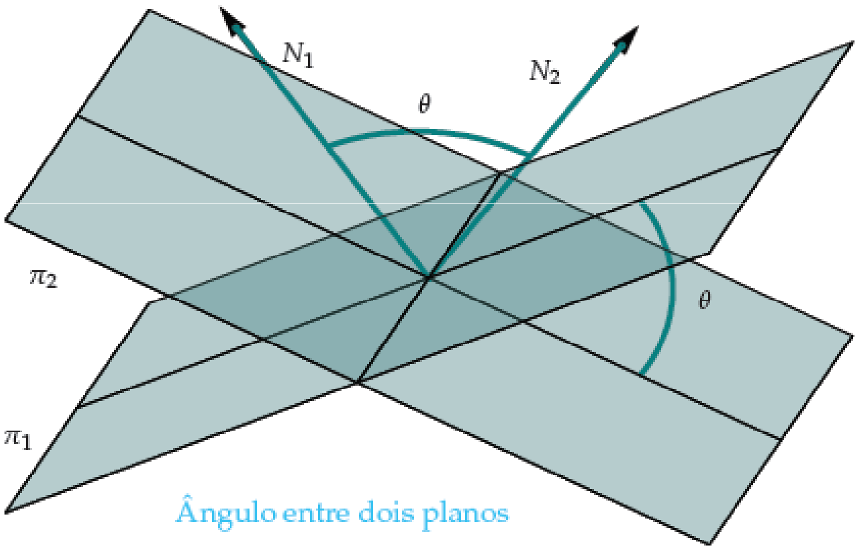
$$\cos(\pi_1, \pi_2) = \frac{|N_1 \cdot N_2|}{||N_1||\,||N_2||}.$$

Proposição

- Sejam dois planos
  - $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$,
  - $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$.
- O cosseno do ângulo entre π_1 *e* π_2 *é*

$$\cos(\pi_1, \pi_2) = \frac{|N_1 \cdot N_2|}{||N_1||\,||N_2||}.$$

- em que $N_1=(a_1,b_1,c_1)$ e $N_2=(a_2,b_2,c_2)$ são os vetores normais de π_1 *e* π_2, *respectivamente.*



Ângulo entre dois planos

- Dois planos π_1 *e* π_2 *ou são paralelos ou se cortam segundo um reta. Eles são paralelos* se, e somente se, os vetores normais de π_1 *e* π_2*, são paralelos, ou seja, um vetor é* um múltiplo escalar do outro. Assim, π *e* π_2 *são paralelos se, e somente se, o ângulo* entre eles é igual à zero

Exemplo

Determinar o ângulo entre os planos cujas equações são

$$\begin{aligned} \pi_1 : \quad x + y + z &= 0\,, \\ \pi_2 : \quad x - y - z &= 0\,. \end{aligned}$$

Os vetores normais a estes planos são os vetores cujas componentes são os coeficientes de x, y e z nas equações dos planos, ou seja,

$$N_1 = (1, 1, 1) \text{ e } N_2 = (1, -1, -1)\,.$$

Assim, o cosseno do ângulo entre π_1 e π_2 é

$$\cos(\pi_1, \pi_2) = \frac{|N_1 \cdot N_2|}{||N_1||\,||N_2||} = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3}\,.$$

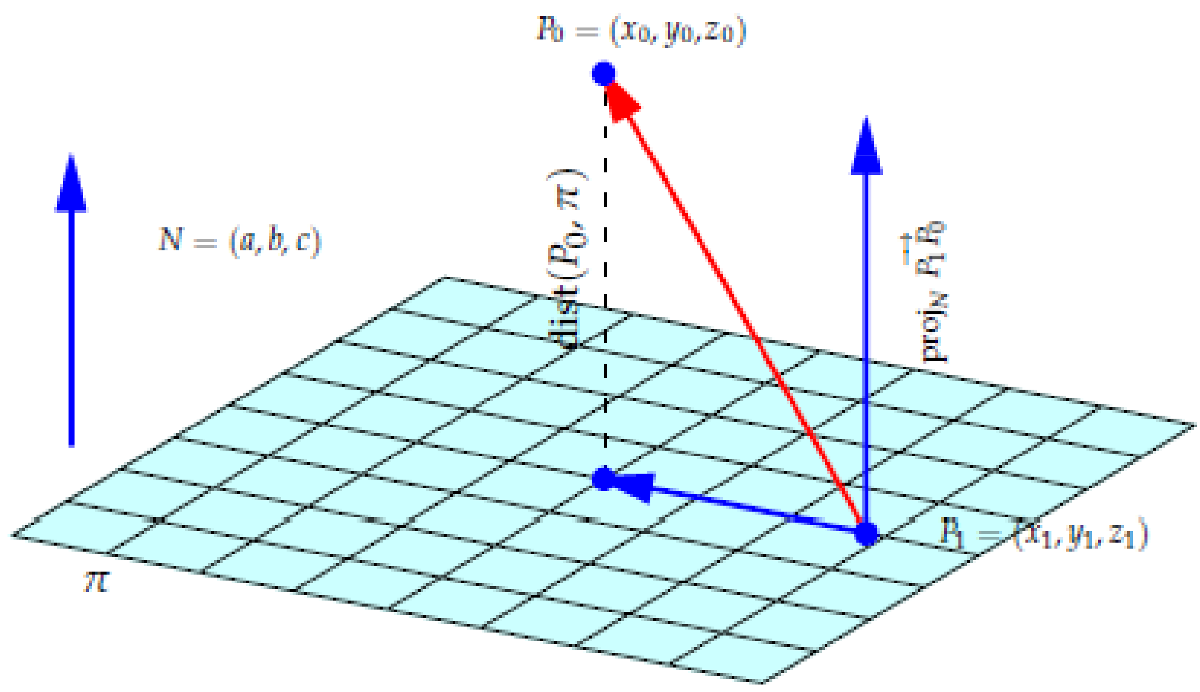
Portanto, o ângulo entre eles é

$$\arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70^\circ\,.$$

Distância de Um Ponto a Um Plano

- Sejam $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ um ponto qualquer e $\pi : ax + by + cz + d = 0$ *um plano. A* distância de P_0 a π *é definida como sendo a distância de P_0 até o ponto de π mais* próximo de P_0.
- Dado um ponto $P_1 = (x_1,y_1,z_1)$ de π, *podemos decompor o vetor* P_1P_0 em duas parcelas, uma na direção do vetor normal de π, *N=(a,b,c) e outra perpendicular* a ele. A componente na direção do vetor N é a projeção ortogonal de P_1P_0 em N.
- A distância de P_0 a π *é igual à norma da projeção, ou* seja, $\text{dist}(P_0, \pi) = ||\text{proj}_N\ P_1P_0||$.
- Temos que:

$$||\text{proj}_N\ \overrightarrow{P_1P_0}\ || = \left\| \left(\frac{\overrightarrow{P_1P_0} \cdot N}{||N||^2} \right) N \right\| = \frac{|\ \overrightarrow{P_1P_0} \cdot N|}{||N||}.$$



Distância de um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ a um plano π

Proposição

- Sejam $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ um ponto qualquer e *π:ax+by+cz+d=0 um plano. A distância de P_0* a *π é dada por*

$$\operatorname{dist}(P_0,\pi) = ||\operatorname{proj}_N \overrightarrow{P_1P_0}\ || = \frac{|\ \overrightarrow{P_1P_0} \cdot N|}{||N||}$$

em que N=(a,b,c) e P1=(x1,y1,z1) é um ponto de π *(isto é, um ponto que satisfaz a equação de π).*

Exemplo

Calcular a distância entre o ponto $P_0 = (1,2,3)$ ao plano

$\pi : x - 2y + z - 1 = 0.$

Fazendo $z = 0$ e $y = 0$ na equação de π, obtemos $x = 1$. Assim, o ponto $P_1 = (1,0,0)$ pertence a π.

$$\overrightarrow{P_1P_0} = (1-1, 2-0, 3-0) = (0,2,3)$$

e

$$N = (1,-2,1)\,.$$

Assim,

$$\operatorname{dist}(P_0,\pi) = ||\operatorname{proj}_N \overrightarrow{P_1P_0}\ || = \frac{|\ \overrightarrow{P_1P_0} \cdot N|}{||N||} = \frac{|0\cdot 1 + 2(-2) + 3\cdot 1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

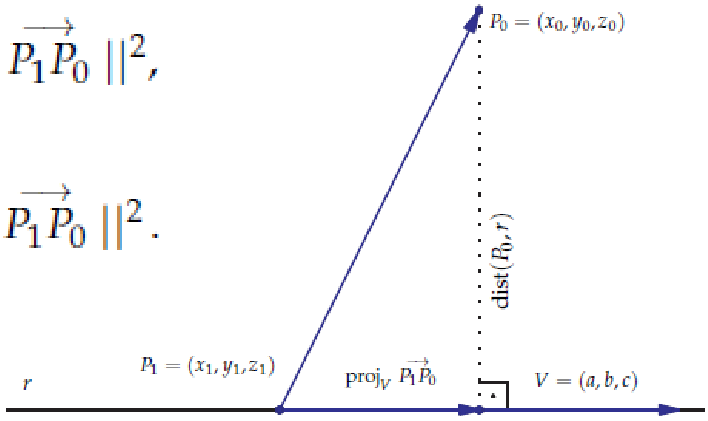
Distância de Um Ponto a Uma Reta

- Sejam $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ um ponto qualquer e r uma reta. A distância de P_0 a r é definida como a distância de P0 ao ponto de r mais próximo de P_0.
- Dado um ponto qualquer $P_1=(x_1,y_1,z_1)$ de r podemos decompor o vetor P_1P_0 em duas parcelas, uma na direção do vetor diretor V de r e outra perpendicular a ele.
- A componente na direção do vetor V é a projeção ortogonal de P_1P_0 em V. Como vemos na Figura abaixo

$$(\text{dist}(P_0,r))^2 + ||\text{proj}_V\ \overrightarrow{P_1P_0}\ ||^2 = ||\ \overrightarrow{P_1P_0}\ ||^2,$$

ou seja,

$$(\text{dist}(P_0,r))^2 = ||\ \overrightarrow{P_1P_0}\ ||^2 - ||\text{proj}_V\ \overrightarrow{P_1P_0}\ ||^2.$$



Distância de um ponto $P_0 = (x_0,y_0,z_0)$ a uma reta r

Proposição

Sejam $P_0 = (x_0,y_0,z_0)$ *um ponto qualquer e*

$$r : \begin{cases} x = x_1 + t\,a \\ y = y_1 + t\,b \\ z = z_1 + t\,c \end{cases} \quad \textit{para todo } t \in \mathbb{R}$$

uma reta. A distância de P_0 *a* r *é dada por*

$$\text{dist}(P_0,r) = \frac{||\ \overrightarrow{P_1P_0} \times V||}{||V||}.$$

Exemplo

Calcular a distância do ponto $P_0 = (1,-1,2)$ à reta

$$r: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -t \\ z = 2-3t \end{cases} \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Um vetor diretor da reta r é $V = (2,-1,-3)$ e um ponto de r é $P_1 = (1,0,2)$. Assim,

$$\overrightarrow{P_1P_0} = (1-1, -1-0, 2-2) = (0,-1,0),$$

$$\overrightarrow{P_1P_0} \times V = (3,0,2),$$

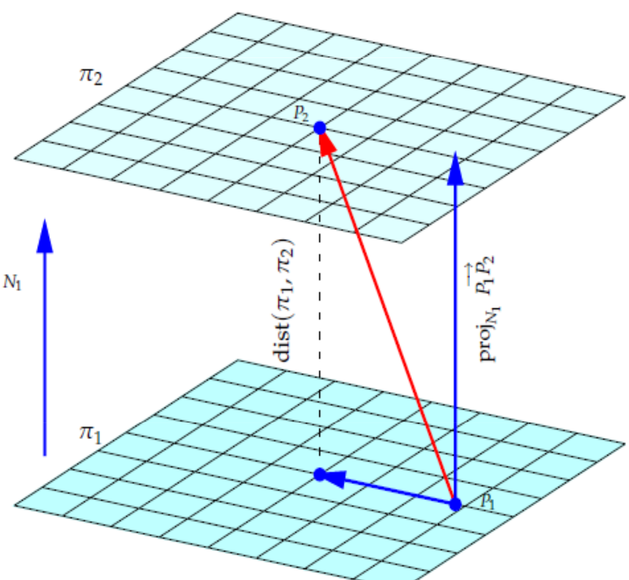
$$||\overrightarrow{P_1P_0} \times V|| = \sqrt{13} \text{ e } ||V|| = \sqrt{14}.$$

Portanto,

$$\text{dist}(P_0, r) = \frac{||\overrightarrow{P_1P_0} \times V||}{||V||} = \sqrt{\frac{13}{14}}.$$

Distância entre Dois Planos

- Sejam dois planos π_1 *e* π_2 *quaisquer. A distância entre* π_1 *e* π_2 *é definida como a* menor distância entre dois pontos, um de π_1 *e outro de* π_2*.*
- Se os seus vetores normais **não são paralelos, então os planos são concorrentes e** neste caso a distância entre eles é igual à zero. Se os seus vetores normais são paralelos, então os planos são paralelos (ou coincidentes) e a distância entre π_1 *e* π_2 *é* igual à distância entre um ponto de um deles, por exemplo P_2 de π_2*, e o ponto de* π_1*, mais próximo de* P_2 *(Figura ao lado). Mas, esta distância é igual à distância de* P_2 *a* π_1*.*



Distância entre dois planos

Exemplo

Os planos $\pi_1 : x + 2y - 2z - 3 = 0$ e $\pi_2 : 2x + 4y - 4z - 7 = 0$ são paralelos, pois os seus vetores normais $N_1 = (1, 2, -2)$ e $N_2 = (2, 4, -4)$ são paralelos (um é múltiplo escalar do outro). Vamos encontrar a distância entre eles.

Vamos encontrar dois pontos quaisquer de cada um deles. Fazendo $z = 0$ e $y = 0$ em ambas as equações obtemos $x_1 = 3$ e $x_2 = 7/2$. Assim, $P_1 = (3, 0, 0)$ pertence a π_1 e $P_2 = (7/2, 0, 0)$ pertence a π_2. Portanto, temos que

$$\operatorname{dist}(\pi_1, \pi_2) = \operatorname{dist}(\pi_1, P_2) = ||\operatorname{proj}_{N_1} \overrightarrow{P_1P_2}\,|| = \frac{|\,\overrightarrow{P_1P_2} \cdot N_1|}{||N_1||}$$

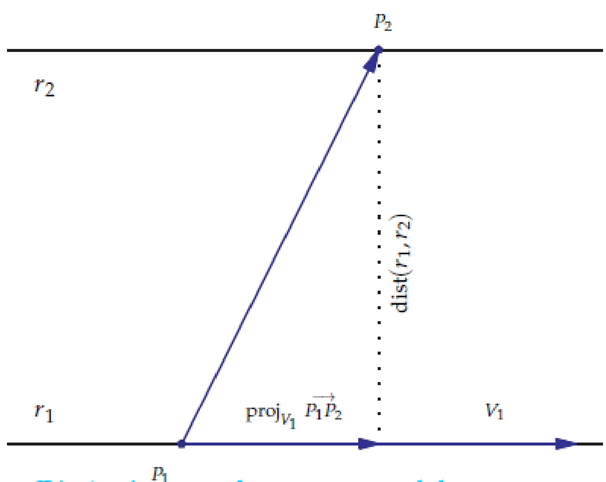
$$= \frac{|(7/2 - 3, 0 - 0, 0 - 0) \cdot (1, 2, -2)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|(1/2) \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0(-2)|}{\sqrt{9}} = \frac{1}{6}.$$

Distância entre Duas Retas

- Sejam r_1 e r_2 duas retas quaisquer. A distância entre r_1 e r_2 é definida como a menor distância entre dois pontos, um de r_1 e outro de r_2.
- Para calcular a distância entre duas retas, vamos dividir em dois casos:
  - Se os **vetores diretores são paralelos, então as retas r_1 e r_2 são paralelas (ou** coincidentes). Neste caso, a distância entre elas é igual à distância entre um ponto de r_2 e a reta r_1, ou vice-versa, entre um ponto de r_1 e a reta r_2 (Figura ao lado). Assim, temos que

$$\operatorname{dist}(r_1, r_2) = \operatorname{dist}(P_1, r_2) = \frac{||\,\overrightarrow{P_1P_2} \times V_2||}{||V_2||}$$

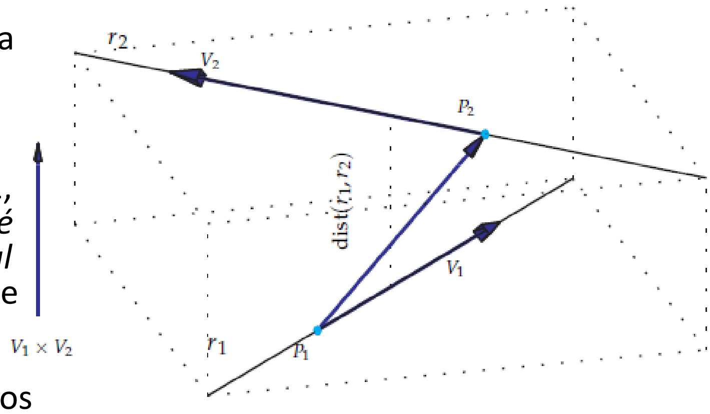
- em que P_1 e P_2 são pontos de r_1 e r_2 e V_1 e V_2 são vetores diretores de r_1 e r_2, respectivamente



Distância entre duas retas paralelas

Distância entre Duas Retas

- Se **os vetores diretores não são paralelos, então as retas são reversas ou concorrentes.**
- Os dois casos podem ser resolvidos da mesma forma. Estas retas definem dois planos paralelos (que podem ser coincidentes, no caso em que elas são concorrentes).
- Um é o plano que contém r1 e é paralelo a r2, vamos chamá-lo de *p1. O outro, contém r2 e é paralelo a r1, p2. O vetor N = V1 V2, é normal (ou* perpendicular) a ambos os planos, em que V1 e V2 são os vetores diretores de r1 e r2 respectivamente. Assim, a distância entre as retas é igual à distância entre estes dois planos (Figura ao lado), ou seja,



Distância entre duas retas reversas

$$\text{dist}(r_1, r_2) = \text{dist}(\pi_1, \pi_2) = \text{dist}(\pi_1, P_2) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot N|}{||N||} = \frac{|P_1P_2 \cdot (V_1 \times V_2)|}{||V_1 \times V_2||}$$

- Em que P1 e P2 são pontos de r1 e r2 e V1 e V2 são vetores diretores de r1 e r2, respectivamente. Observe que se as retas são concorrentes a distância entre elas é zero, pois os vetores P1P2, V1 e V2 são coplanares e P1P2 . (V1x V2) = 0

Exemplo

Vamos determinar a distância entre as retas

$$r_1 : \frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{-6}.$$

e

$$r_2 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 2 - 3t \end{cases} \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

As retas são paralelas, pois seus vetores diretores $V_1 = (4, -2, -6)$ e $V_2 = (2, -1, -3)$ são paralelos (um é um múltiplo escalar do outro, ou ainda as componentes correspondentes são proporcionais). Além disso, o ponto $P_1 - (1, -1, 2)$ pertence à reta r_1. Como dissemos acima, a distância de r_1 a r_2 é igual à distância entre um ponto de r_2 e a reta r_1. Assim, temos que

$$\text{dist}(r_1, r_2) = \text{dist}(P_1, r_2) = \frac{||\overrightarrow{P_1P_2} \times V_2||}{||V_2||} = \sqrt{\frac{13}{14}}.$$

Exemplo

Determinar a distância entre as retas

$$r_1 : \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = z.$$

e

$$r_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 1-t \end{cases} \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

As retas r_1 e r_2 são paralelas aos vetores $V_1 = (3,2,1)$ e $V_2 = (1,2,-1)$ e passam pelos pontos $P_1 = (-1,1,0)$ e $P_2 = (0,0,1)$, respectivamente. As retas não são paralelas, pois seus vetores diretores não são paralelos (observe que a 1ª componente de V_1 é 3 vezes a 1ª componente de V_2, mas as 2ª's componentes são iguais). Logo,

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (0-(-1), 0-1, 1-0) = (1,-1,1).$$

Um vetor perpendicular a ambas as retas é $\quad N = V_1 \times V_2 = (-4,4,4)$.

Este vetor é normal aos planos π_1 (que contém r_1 e é paralelo a r_2) e π_2 (que contém r_2 e é paralelo a r_1) Assim,

$$\begin{aligned} \text{dist}(r_1, r_2) &= \text{dist}(\pi_1, \pi_2) = \text{dist}(\pi_1, P_2) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot N|}{||N||} \\ &= \frac{|1(-4) + (-1) \cdot 4 + 1 \cdot 4|}{\sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 4^2}} = \frac{|-4|}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$