FBV – DeVry Brasil

Técnicas de Primitiva

Funções de Uma Variável

Prof. Rossini Bezerra

A NOÇÃO DE PRIMITIVA

A questão posta pela operação derivada, era: dada uma função f(x), encontrar outra função, digamos F(x), que é igual à f´(x), ou seja, igual à derivada de f(x).

$$F(x) = f´(x)$$

Com a nova operação que estudaremos, agora, a questão é, de certa forma, posta de forma inversa. Isto é, dada a função f(x), queremos determinar outra função F(x), cuja derivada é igual à função dada:

$$F´(x) = f(x)$$

Definimos como **primitiva** esta função F(x) obtida com tal procedimento.

Consideremos f(x)=senx. Desejamos encontrar um outra função F(x), tal que, F´(x)=senx. Esta função procurada é F(x)=-cosx, pois F´(x)=senx.

Definição 1. Diz-se que F(x) é uma **primitiva** da função f(x), no intervalo [a,b], se em todos os pontos deste intervalo, tem-se F´(x)=f(x).

Note que, para f(x)=senx, a função G(x)=-cosx +5 também tem sua derivada igual a f(x); logo também ela é uma primitiva de f(x). Portanto, uma função qualquer admite mais de uma primitiva.

Outros exemplos:

$f(x) = x^3$ uma primitiva é: $F(x) = \dfrac{x^4}{4}$

$f(x) = \cos x$ uma primitiva é: $F(x) = senx$

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ uma primitiva é: $F(x) = \ln x$

Mas as funções:

$F(x) = \dfrac{x^4}{4} + 5$ $\quad F(x) = senx + \dfrac{3}{4}$ $\quad F(x) = \ln x + a$

São, correspondentemente, primitivas das funções dadas.

Teorema. Se duas funções, $F_1(x)$ e $F_2(x)$, são primitivas da função f(x), no intervalo [a,b], então, a diferença entre elas é uma constante.

Demonstração. Pela definição de primitiva, temos que as derivadas das $F_1(x)$ e $F_2(x)$ são iguais a f(x):

$$F_1{'}(x) = f(x)$$
$$F_2{'}(x) = f(x)$$

Definindo a diferença de $F_1(x)$ e $F_2(x)$ como uma nova função G(x), teremos

$$G(x) = F_1(x) - F_2(x)$$

Calculando agora a derivada de G(x), temos:

$$G'(x) = F_1{'}(x) - F_2{'}(x)$$
$$G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$
$$G(x) = F_1(x) - F_2(x) = \text{Constante}$$

Basta então conhecer uma primitiva, pois as demais diferem apenas de uma constante. Podemos então escrever para a primitiva de uma função f(x) **:**

$$F(x) + C$$

Definição 2. Denomina-se **Integral indefinida** de uma função f(x) a operação de determinação da expressão da primitiva dessa função, F(x)+C; esta operação é simbolicamente representa por

$$\int f(x)dx$$

Portanto, da definição, teremos

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$$com$$

$$F'(x) = f(x)$$

Propriedades:

Em virtude da definição da operação, temos que a derivada de uma integral indefinida é igual à função dada, ou integrando:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x) + C\right)' = F'(x) = f(x)$$

A diferencial de uma integral indefinida é igual à expressão no integrando

$$d\left(\int f(x)dx\right) = \left(F(x) + C\right)' dx = F'(x)dx = f(x)dx$$

Lembrando que a diferencial de uma função é a sua derivada vezes a diferencial da variável independente e usando o resultado anterior

A integral indefinida da diferencial de uma dada função é igual à própria função mais uma constante

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

exemplos:

	Funçao	Derivada	
$\int x^4 dx$	x^5	$5x^4$	$\frac{x^5}{5}$
$\int x^3 dx$	x^4	$4x^3$	$\frac{x^4}{4}$
$\int senx\, dx$	x^3	$3x^2$	$-\cos x$
$\int \cos x\, dx$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$senx$
$\int \frac{dx}{x}$	$senx$	$\cos x$	$\ln x$
$\int \frac{dx}{x^2}$	$\cos x$	$-senx$	$-\frac{1}{x}$
$\int e^x dx$	tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$	e^x
$\int \frac{dx}{\cos^2 x}$	e^x	e^x	tgx
	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	

Outras propriedades:

Teorema. A integral indefinida da soma algébrica de duas funções é a soma algébrica das integrais indefinidas dessas funções:

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)\,dx$$

Demonstração. Calculando a derivada dessa integral temos:

$$\left(\int (f(x)+g(x))\,dx\right)' = f(x)+g(x)$$

Mas pela propriedade demonstrada antes

$$f(x) = (\int f(x)dx)'$$

$$g(x) = (\int g(x)dx)'$$

Então

$$\left(\int (f(x)+g(x))\,dx\right)' = \left(\int f(x)dx\right)' + \left(\int g(x)dx\right)'$$

O resultado à direita é o que se obtém calculando a derivada do membro direito da tese do teorema

$$\left(\int f(x)dx + \int g(x)\,dx\right)' = \left(\int f(x)dx\right)' + \left(\int g(x)\,dx\right)'$$

Teorema. Pode-se retirar um fator constante de dentro do sinal de integração

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)dx$$

Demonstração. Calculando a derivada dessa integral temos:

$$\left(\int cf(x)\,dx\right)' = cf(x)$$

Mas pela propriedade demonstrada antes

$$cf(x) = c\left(\int f(x)dx\right)'$$

Então

$$\left(\int cf(x)\,dx\right)' = c\left(\int f(x)dx\right)'$$

O resultado à direita é o que se obtém calculando a derivada do membro direito da tese do teorema

$$\left(c\int f(x)dx\right)' = c\left(\int f(x)dx\right)'$$

POR MUDANÇA DE VARIÁVEL

Nem sempre temos pela frente o cálculo de uma integral de uma função elementar, mas de uma composição delas. Por exemplo

$$\int sen^2 x \cos x\,dx$$

Entretanto, fazendo algumas transformações, por mudança de variável, podemos chegar a expressões com funções elementares. No exemplo, se olharmos com cuidado, vemos que :

$$\cos x dx = d(senx)$$

Podemos então fazer a transformação

$$u = senx$$
$$entao$$
$$du = \cos dx$$

A integral torna-se:

$$\int u^2\,du = \frac{u^3}{3} = sen^3 x + C$$

TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO

OBJETIVO: Apresentar técnicas para determinar a função F(x) – conhecida como primitiva – tal que F'(x) = f(x) ou:

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

As principais técnicas de primitivação, para FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL são:

– INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO DE VARIÁVEL

– INTEGRAÇÃO POR PARTES

– INTEGRAÇÃO POR DECOMPOSIÇÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS

– INTEGRAÇÃO UTILIZANDO SUBSTITUIÇÕES (POR MEIO DE IDENTIDADES) TRIGONOMÉTRICAS

Seguem algum exercícios onde estas técnicas são aplicadas.

EXERCÍCIO 01

Calcular $\int (x^2+1)^{50}\, 2x\, dx$

Solução

INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO

Seja **u = x² + 1** $\Rightarrow$ $\frac{du}{dx} = 2x$

Logo: **2x dx = du**

Assim, a integral dada pode ser escrita como:

$$\int (u)^{50}\, du$$

$$\int (u)^{50}\, du = \frac{u^{51}}{51} + C = \boxed{\frac{(x^2+1)^{51}}{51} + C}$$

EXERCÍCIO 02

Calcular $\int \operatorname{sen}(x+9)\,dx$

Solução

INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO

Seja **u = x + 9** $\Rightarrow$ $\dfrac{du}{dx} = 1$

Logo: **dx = du**

Assim, a integral dada pode ser escrita como:

$$\int \operatorname{sen}(u)\,du$$

$$\int \operatorname{sen}(u)\,du = -\cos(u) + C = \boxed{-\cos(x+9) + C}$$

EXERCÍCIO 03

Calcular $\int \operatorname{sen}^2(x)\cos(x)\,dx$

Solução

INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO

Seja **u = sen(x)** $\Rightarrow$ $\dfrac{du}{dx} = \cos(x)$

Logo: **cos(x) dx = du**

Assim, a integral dada pode ser escrita como:

$$\int u^2\,du$$

$$\int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + C = \boxed{\frac{\operatorname{sen}^3(x)}{3} + C}$$

EXERCÍCIO 04

Calcular $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

Solução

INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO

Seja **u =** $\sqrt{x}$

Então $\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\left[x^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Logo: $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ = **du**

Antes da substituição, a função dada será escrita de outra forma.

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{1}\frac{2}{2\sqrt{x}} dx = \int 2e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

Assim, a integral dada pode ser escrita como:

$$\int 2e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \int 2e^{u} du$$

outra maneira de chegar aqui sem manipular a função dada é fazendo (página 08):

$\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = du \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2du$

$$\int 2e^{u} du = 2\int e^{u} du = 2e^{u} + C = \boxed{2e^{\sqrt{x}} + C}$$

Ou seja: $\boxed{\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2e^{\sqrt{x}} + C}$

EXERCÍCIO 05

Calcular $\int x^2\sqrt{x-1}\,dx$

Solução

INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO

Seja **u = x – 1**

Logo: **dx = du**

Se u = x – 1

Então x = u + 1

$x^2 = (u+1)^2$

$x^2 = u^2 + 2u + 1$

Assim, a integral dada pode ser escrita como:

$$\int (u^2+2u+1)\sqrt{u}\,du$$

ou:

$$\int (u^2+2u+1)\,u^{\frac{1}{2}}\,du = \int\left(u^2u^{\frac{1}{2}}+2u\,u^{\frac{1}{2}}+1u^{\frac{1}{2}}\right)du$$

$$= \int\left(u^{\frac{5}{2}}+2u^{\frac{3}{2}}+u^{\frac{1}{2}}\right)du$$

Portanto:

$$\int\left(u^{\frac{5}{2}}+2u^{\frac{3}{2}}+u^{\frac{1}{2}}\right)du = \frac{u^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1}+2\frac{u^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C$$

Finalmente:

$$\int \left(u^{\frac{5}{2}} + 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}} \right) du = \frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$

Escrevendo em termos de x:

$$\boxed{\int x^2\sqrt{x-1}\,dx = \frac{2}{7}(x-1)^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C}$$

EXERCÍCIO 06

Calcular $\int xe^x\,dx$

Solução

INTEGRAÇÃO POR PARTES

A integral dada deve ser escrita na forma $\int u\,dv$.

Seja, portanto:

$\boxed{u = x}$ $\boxed{dv = e^x dx}$

$$\int \boxed{x}\,\boxed{e^x\,dx}$$

Então:

$du = dx$

$\int dv = \int e^x dx \quad \rightarrow \quad v = \int e^x dx = e^x$

Deste modo:

$$\int xe^x dx = \boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du} = xe^x - \int e^x\,dx = \boxed{xe^x - e^x + C}$$

a constante C pode ser incluída apenas no final.

EXERCÍCIO 07

Calcular $\int x^2 e^{-x}\, dx$

Solução

INTEGRAÇÃO POR PARTES

Seja:

$$u = x^2 \qquad dv = e^{-x}dx$$

Assim:

$$du = 2x\,dx$$

$$\int dv = \int e^{-x}dx \quad \rightarrow \quad v = \int e^{-x}dx = -e^{-x}$$

Portanto:

$$\int x^2 e^{-x}dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du = -x^2 e^{-x} - \int (-e^{-x})\,2x dx$$

ou:

$$\boxed{\int x^2 e^{-x}dx = -x^2 e^{-x} + 2\int x\,e^{-x}\,dx} \qquad (1)$$

A última integral é semelhante à original, com a exceção de que x^2 foi substituído por x.

Outra integração por partes aplicada a

$$\int x\,e^{-x}\,dx$$

completará o problema.

Seja:

$$u = x \qquad dv = e^{-x}dx$$

Assim:

$$du = dx$$

$$\int dv = \int e^{-x}dx \quad \rightarrow \quad v = \int e^{-x}dx = -e^{-x}$$

Portanto:

$$\int x\,e^{-x}dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du = -xe^{-x} - \int (-e^{-x})\,dx$$

ou:

$$\int x\,e^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = \boxed{-xe^{-x} - e^{-x} + C_1} \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1) resulta:

$$\int x^2e^{-x}dx = -x^2e^{-x} + 2\int x\,e^{-x}\,dx$$
$$= -x^2e^{-x} + 2\left[-xe^{-x} - e^{-x} + C_1\right]$$
$$= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + 2C_1$$

Portanto:

$$\boxed{\int x^2e^{-x}dx = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C}$$

EXERCÍCIO 08

Determinar $\displaystyle\int \frac{3x^4+4x^3+16x^2+20x+9}{(x+2)(x^2+3)^2}\,dx$

Solução

INTEGRAÇÃO UTILIZANDO DECOMPOSIÇÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS: Frações próprias

O integrando é uma fração própria, uma vez que o numerador possui grau 4 e o denominador possui grau 5.

Pela regra do **fator linear**, o fator (x + 2) no denominador introduz o termo:

$$\frac{A}{x+2}$$

Pela regra do **fator (quadrático) repetido,** o fator $(x^2 + 2)^2$ presente no denominador introduz os termos:

$$\frac{Bx+C}{x^2+3}+\frac{Dx+E}{(x^2+3)^2}$$

Assim, a decomposição em frações parciais do integrando é:

$$\frac{3x^4+4x^3+16x^2+20x+9}{(x+2)(x^2+3)^2}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+3}+\frac{Dx+E}{(x^2+3)^2}$$

Multiplicar os dois lados da equação por $(x + 2)(x^2 + 3)^2$

$$(x+2)(x^2+3)^2\frac{3x^4+4x^3+16x^2+20x+9}{(x+2)(x^2+3)^2}=(x+2)(x^2+3)^2\frac{A}{x+2}+$$

$$(x+2)(x^2+3)^2\frac{Bx+C}{x^2+3}+(x+2)(x^2+3)^2\frac{Dx+E}{(x^2+3)^2}$$

que resulta:

$$3x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x + 9 = (x^2 + 3)^2 A + (x+2)(x^2+3)(Bx + C) + (x+2)(Dx + E)$$

Expandindo o lado direito e reagrupando termos semelhantes resulta:

$$\begin{aligned} 3x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x + 9 = \; & (A + B)\,x^4 + (2B + C)\,x^3 + \\ & (6A + 3B + 2C + D)\,x^2 + \\ & (6B + 3C + 2D + E)\,x + \\ & (6C + 9A + 2E) \end{aligned}$$

Equacionando os coeficientes correspondentes de cada lado, obtém-se um sistema de cinco equações algébricas lineares em 5 incógnitas:

$$\begin{cases} A + B = 3 \\ 2B + C = 4 \\ 6A + 3B + 2C + D = 16 \\ 6B + 3C + 2D + E = 20 \\ 9A + 6C + 2E = 9 \end{cases}$$

A solução deste sistema resulta:

$$A = 1 \qquad B = 2 \qquad C = 0 \qquad D = 4 \qquad E = 0$$

Portanto:

$$\frac{3x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x + 9}{(x+2)(x^2+3)^2} = \frac{1}{x+2} + \frac{2x}{x^2+3} + \frac{4x}{(x^2+3)^2}$$

Logo:

$$\int \frac{3x^4+4x^3+16x^2+20x+9}{(x+2)(x^2+3)^2}\,dx = \int \frac{1}{x+2}\,dx + \int \frac{2x}{x^2+3}\,dx + \int \frac{4x}{(x^2+3)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{x+2}\,dx + \int \frac{2x}{x^2+3}\,dx + 4\int \frac{x}{(x^2+3)^2}\,dx$$

$u = x+2$

$\frac{du}{dx} = 1 \quad \Rightarrow \quad du = dx$

$\int \frac{1}{x+2}dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C \quad \Rightarrow \quad \ln|x+2| + C$

$u = x^2+3$

$\frac{du}{dx} = 2x \quad \Rightarrow \quad du = 2x\,dx$

$\int \frac{2x}{x^2+3}dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C \quad \Rightarrow \quad \ln|x^2+3| + C$

$$= \int \frac{1}{x+2}\,dx + \int \frac{2x}{x^2+3}\,dx + 4\int \frac{x}{(x^2+3)^2}\,dx$$

$\int \frac{x}{(x^2+3)^2}dx = \int x(x^2+3)^{-2}\,dx$

$u = x^2+3 \quad \Rightarrow \quad du = 2x\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{2} = x\,dx$

$\int (x^2+3)^{-2}\,x\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\int u^{-2}\,du \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left[\frac{u^{-2+1}}{-2+1}\right] = -\frac{1}{2u} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2(x^2+3)} + C$

E, finalmente:

$$\boxed{\int \frac{3x^4+4x^3+16x^2+20x+9}{(x+2)(x^2+3)^2}\,dx = \ln|x+2| + \ln|x^2+3| - \frac{2}{x^2+3} + C}$$

EXERCÍCIOS 09

INTEGRAÇÃO DE POTÊNCIAS QUADRÁTICAS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS SEN(X) E COS(X)

Sejam as **identidades trigonométricas**:

$$\text{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

Assim,

$$\int \text{sen}^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\boxed{\int \cos 2x\,dx}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^{0+1}}{0+1}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{\text{sen}2x}{2}\right]$$

$$\int \cos 2x\,dx$$

$$u = 2x$$

$$\frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow \frac{du}{2} = dx$$

$$\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \cos u\,du$$

$$= \frac{1}{2}\text{sen}\,u + C$$

$$\int \text{sen}^2 x = \frac{x}{2} - \frac{\text{sen}\,2x}{4} + C$$

Da mesma forma, e utilizando a outra identidade trigonométrica:

$$\int \cos^2 x = \frac{x}{2} + \frac{\text{sen}\,2x}{4} + C$$

A integral

$$\int \text{sen}^2 x \cos^2 x\;dx$$

pode ser resolvida fazendo:

$$\int \text{sen}^2 x \cos^2 x\;dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) dx$$

$$= \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1-\cos^2 2x\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1 - \cos^2 2x\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\int 1\,dx - \frac{1}{4}\boxed{\int \cos^2 2x\,dx}$$

$$\int \cos^2 2x\,dx$$

$$u = 2x \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{2} = dx$$

$$\int \cos^2 2x\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\int \cos^2 u\,du = \frac{1}{2}\left[\frac{u}{2} + \frac{\text{sen}\,2u}{4}\right] = \frac{u}{4} + \frac{\text{sen}\,2u}{8} = \frac{x}{2} + \frac{\text{sen}\,4x}{8}$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\left[\frac{x}{2} + \frac{\text{sen}4x}{8}\right]$$

$$\boxed{= \frac{x}{8} - \frac{\text{sen}4x}{32} + C}$$

EXERCÍCIO 10

Determinar $\int (x+2)\,\text{sen}(x^2 + 4x - 6)\,dx$

Solução

INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO

Seja $u = x^2 + 4x - 6$

Então:

$$\frac{du}{dx} = 2x + 4$$

$$du = (2x+4)\,dx = 2\,(x+2)\,dx$$

Mas:

$$\int \boxed{(x+2)} \operatorname{sen}(x^2+4x-6) \boxed{dx}$$

Logo, seja: $\frac{du}{2} = (x+2)\,dx$

Assim,

$$\int (x+2)\operatorname{sen}(x^2+4x-6)\,dx = \int \operatorname{sen}(u)\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(u)\,du$$

Sabe-se que:

$$\boxed{\int \operatorname{sen}(u)\,du = -\cos(u) + C}$$

TABELA

Então:

$$\int (x+2)\operatorname{sen}(x^2+4x-6)\,dx = \frac{1}{2}(-\cos(u)+C)$$

Portanto:

$$\boxed{\int (x+2)\operatorname{sen}(x^2+4x-6)\,dx = -\frac{1}{2}\cos(x^2+4x-6)+C}$$

EXERCÍCIO 11

Determinar $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$

Solução

INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO

Seja $u = x^2 + x + 1$

Então:

$$\frac{du}{dx} = 2x+1 \Rightarrow du = (2x+1)\,dx$$

Na integral original, fazer:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1-1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$$

Mas:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+1-1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \underbrace{\boxed{\frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx}}_{1} - \underbrace{\boxed{\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx}}_{2}$$

1 INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du$$

ver detalhes na página **anterior**

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right] = u^{\frac{1}{2}} = \sqrt{u}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \sqrt{x^2+x+1}+C}$$

2 TABELA

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{a^2+u^2}}\,du = \ln\left|u+\sqrt{a^2+u^2}\right| + C}$$

A segunda integral a ser resolvida está (ou pode ser colocada) na forma acima:

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}}\,du$$

onde:

$$u = x+\frac{1}{2} \qquad du = dx \qquad a = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Portanto:

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}\right| + C$$

Então, finalmente:

$$\boxed{\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}\right| + C}$$

EXERCÍCIO 12

Determinar $\int \frac{9x^3 - 3x + 1}{x^3 - x^2} dx$

Solução

INTEGRAÇÃO UTILIZANDO DECOMPOSIÇÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS: Frações impróprias

O primeiro passo é realizar uma divisão no integrando e fazer aparecer frações próprias.

$$
\begin{array}{r|l}
9x^3 + 0x^2 - 3x + 1 & x^3 - x^2 \\
\cline{2-2}
-\underline{9x^3 - 9x^2} & 9 \\
9x^2 - 3x + 1 &
\end{array}
$$

$$\frac{9x^3 - 3x + 1}{x^3 - x^2} = 9 + \boxed{\frac{9x^2 - 3x + 1}{x^3 - x^2}}$$

fração própria

$$\int \frac{9x^3 - 3x + 1}{x^3 - x^2} dx = \int 9 + \frac{9x^2 - 3x + 1}{x^3 - x^2} dx$$

$$= \int 9\,dx + \int \frac{9x^2 - 3x + 1}{x^3 - x^2} dx$$

$$= \int 9\,dx + \int \frac{9x^2 - 3x + 1}{x^2(x-1)} dx$$

DECOMPOSIÇÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS

$$\frac{9x^2 - 3x + 1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{(x-1)}$$

$$x^2(x-1)\frac{9x^2 - 3x + 1}{x^2(x-1)} = x^2(x-1)\frac{A}{x} + x^2(x-1)\frac{B}{x^2} + x^2(x-1)\frac{C}{(x-1)}$$

$$9x^2 - 3x + 1 = (A + C)x^2 + (-A + B)x - B$$

$$\begin{cases} A+C=9 \\ -A+B=-3 \\ -B=1 \end{cases} \Rightarrow \quad A = 2 \qquad B = -1 \qquad C = 7$$

$$= \int 9\,dx + \int \frac{9x^2-3x+1}{x^2(x-1)}dx$$

$$= \int 9\,dx + \int \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{7}{(x-1)}\right)dx$$

$$= \int 9\,dx + \int \frac{2}{x}dx - \int \frac{1}{x^2}dx + \int \frac{7}{(x-1)}dx$$

$$\boxed{= 9x + 2\ln|x| + \frac{1}{x} + 7\ln|x-1| + C}$$

EXERCÍCIO 13

Determinar $\int \frac{1}{x^3+x^2-2x}dx$

Solução

INTEGRAÇÃO UTILIZANDO DECOMPOSIÇÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS: Fatores lineares não repetidos

$$\frac{1}{x^3+x^2-2x} = \frac{1}{x(x^2+x-2)} = \frac{1}{x(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{1}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x+2)}$$

Multiplicando os dois lados da igualdade por **x (x–1)(x+2)** e rearranjando resulta:

$$1 = (A+B+C)x^2 + (A+2B-C)x - 2A$$

Portanto:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A+2B-C=0 \\ -2A=1 \end{cases} \Rightarrow \quad A=-\frac{1}{2} \qquad B=\frac{1}{3} \qquad C=\frac{1}{6}$$

E, finalmente:

$$\frac{1}{x(x-1)(x+2)} = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{3(x-1)} + \frac{1}{6(x+2)}$$

Logo:

$$\int \frac{1}{x^3+x^2-2x}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{1}{6}\int \frac{1}{x+2}dx$$

$$\boxed{\int \frac{1}{x^3+x^2-2x}dx = -\frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{1}{6}\ln|x+2| + C}$$