

Coordenadas no espaço

Prof. Rossini Bezerra

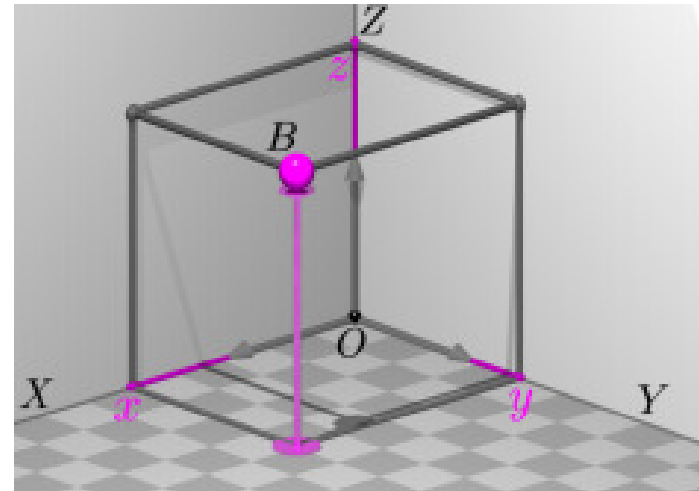
FBV

Objetivos

- Definir os sistemas ortogonais de coordenadas cartesianas no espaço.
- Localizar pontos no espaço a partir das suas coordenadas cartesianas.

Interpretação

- A posição em que a bolinha se encontra no quarto é caracterizada mediante um terno de números reais (neste caso, não-negativos) que designamos por (x, y, z) e denominamos as coordenadas de B em relação ao sistema $OXY Z$.
- É isso mesmo! Acabamos de construir um sistema de coordenadas no espaço



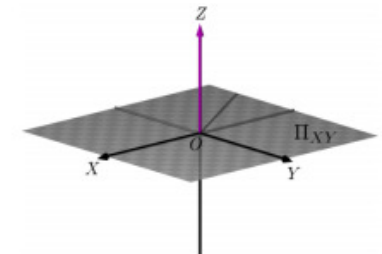
Coordenadas cartesianas no espaço

- Definição:
 - Um sistema (ortogonal positivo) de coordenadas cartesianas no espaço consiste da escolha de um ponto O do espaço, denominado origem, e de três retas concorrentes em O e mutuamente perpendiculares, denominadas eixos OX , OY e OZ , sob cada uma das quais há uma cópia da reta real $\mathbb{R}$, satisfazendo as seguintes propriedades

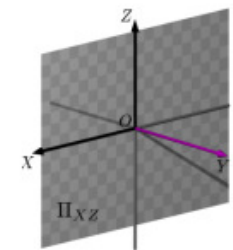
- a. O zero de cada cópia de R considerada, coincide com o ponto O .
- b. Escolhamos duas dessas retas. As retas escolhidas determinam um plano que passa pela origem O . Nesse plano, escolhemos uma das retas para ser o eixo OX e a outra para ser o eixo OY . O plano que contém esses eixos é denominado plano XY .
- c. Escolhamos um dos semi-eixos do eixo OX para ser o semi-eixo OX positivo. No plano XY , o semi-eixo OY positivo é obtido pela rotação de 90° do semi-eixo OX positivo, no sentido anti-horário, em torno da origem.
- d. A terceira reta, perpendicular ao plano XY e que passa pela origem, é o eixo OZ . Nela, o semi-eixo OZ positivo é escolhido de modo que se um observador em pé na origem sobre o plano XY , com as costas apoiadas no semi-eixo OZ positivo e o braço direito esticado na direção do semi-eixo OX positivo, verá o semi-eixo OY positivo à sua frente.

Em relação a um sistema de coordenadas cartesianas $OXY Z$, cada ponto P do espaço é caracterizado por um terno de números reais (x,y,z) denominados as coordenadas do ponto P no sistema $OXY Z$.

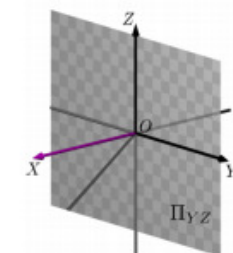
- A escolha de um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas implica a determinação de três planos, chamados planos cartesianos, que se intersectam na origem. Cada um desses planos contém exatamente dois dos eixos OX , OY ou OZ e é perpendicular ao outro eixo. O plano que contém os eixos OX e OY será designado por Π_{XY} e chamado plano XY
- Analogamente, o plano que contém os eixos OX e OZ é designado por Π_{XZ} e chamado plano XZ
- Finalmente, o plano YZ , designado Π_{YZ} ,
- é aquele que contém os eixos OY e OZ



Plano XY .



Plano XZ .

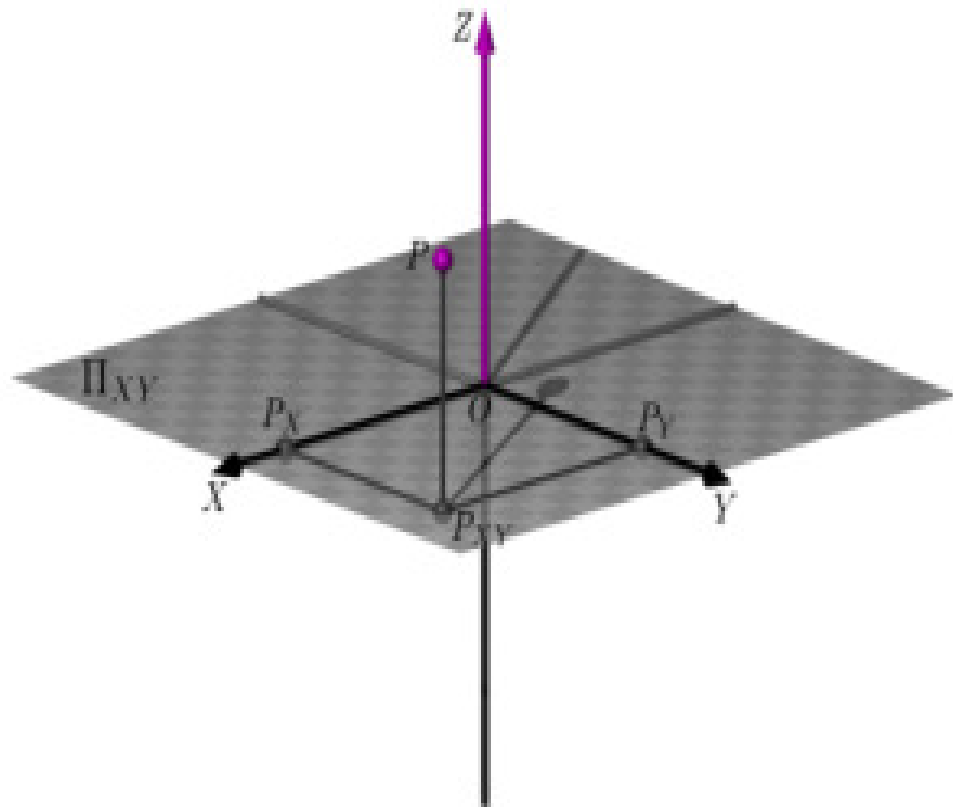


Plano YZ .

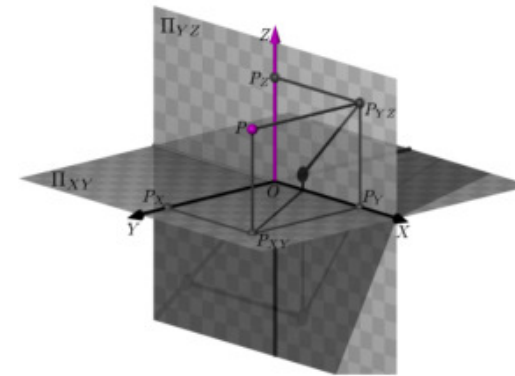
Determinando as coordenadas de um ponto no sistema OXY Z

- Para determinar as coordenadas de um ponto P no espaço, fazemos as projeções perpendiculares de P sobre dois dos planos cartesianos.
- Isto é, dado um ponto P , a reta paralela ao eixo OZ que passa por P , intersecta o plano XY num ponto que designaremos P_{XY} .
- Para determinar as coordenadas nos eixos OX e OY , traçamos as paralelas a esses eixos que passam pelo ponto projetado P_{XY} . Tais paralelas intersectam os eixos OX e OY em pontos P_X e P_Y respectivamente.
- O ponto P_X corresponde a um número real x que colocamos no eixo OX ; esse número real é a primeira coordenada de P e é chamado a abscissa do ponto P .
- Da mesma maneira, o ponto P_Y do eixo OY corresponde a um número real y que colocamos no eixo OY ; esse número é a segunda coordenada de P e é chamado a ordenada do ponto P .

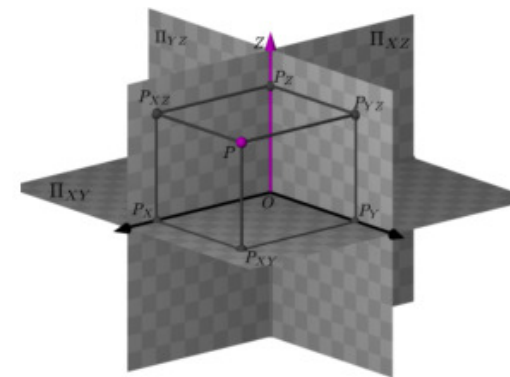
Determinando as coordenadas de um ponto no sistema OXY Z



Abscissa e a ordenada de P .



Cota de P .



Coordenadas de P .

Convenção

Convenção

- Daqui em diante, um ponto P que tem abscissa x , ordenada y e cota z será identificado com seu terno de coordenadas cartesianas (x,y,z) :
- $P = (x,y,z)$
- Os planos cartesianos são caracterizados da seguinte maneira:
- $\Pi_{XY} = \{(x,y,0) | x,y \in \mathbb{R}\}$, $\Pi_{XZ} = \{(x,0,z) | x,z \in \mathbb{R}\}$ e $\Pi_{YZ} = \{(0,y,z) | y,z \in \mathbb{R}\}$.

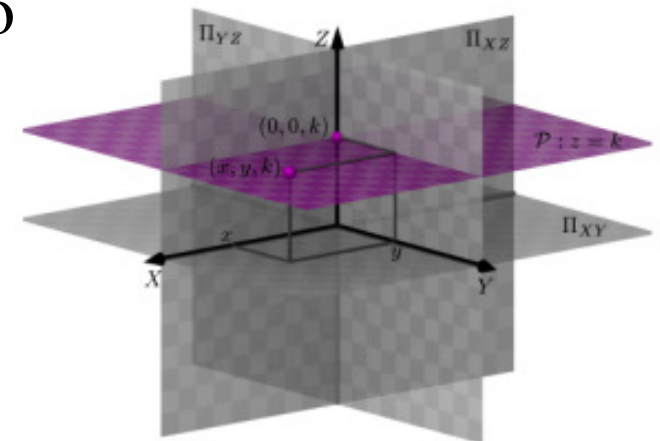
Isto é, dado um ponto $P = (x,y,z)$ no espaço, temos:

- $P \in \Pi_{XY} \Leftrightarrow z = 0$, portanto, a equação cartesiana de Π_{XY} é: $z = 0$.
- $P \in \Pi_{XZ} \Leftrightarrow y = 0$, portanto, a equação cartesiana de Π_{XZ} é: $y = 0$.
- $P \in \Pi_{YZ} \Leftrightarrow x = 0$, portanto, a equação cartesiana de Π_{YZ} é: $x = 0$.
- Com esta caracterização dos planos cartesianos, vemos que o eixo OX consiste nos pontos tais que $y = 0$ e $z = 0$, isto é: $OX = \Pi_{XY} \cap \Pi_{XZ}$ e suas equações cartesianas são $y = 0$ e $z = 0$

Exemplo

Caracterizar os planos paralelos aos planos coordenados.

- Solução: Um plano P é paralelo ao plano Π_{XY} se, e somente se, é perpendicular ao eixo OZ .
- Sendo P perpendicular a o eixo OZ , temos $P \cap OZ = \{(0,0,k)\}$, para algum $k \in \mathbb{R}$. Além disso, note que a terceira coordenada de um ponto (a cota), mede essencialmente a altura do ponto com respeito ao plano XY . Logo, como P é para-
- lelo ao plano XY , a terceira coordenada de todo ponto de P é igual a k . Isto é, $P = \{(x,y,k) | x,y \in \mathbb{R}\}$.
- Portanto, como não há restrição sobre as coordenadas x e y dos pontos de P , a equação cartesiana de P é $z = k$



Plano $\mathcal{P} : z = k$.

- Analogamente, um plano Q que é paralelo ao plano Π_{XZ} deve ser perpendicular ao eixo OY . Portanto, $Q \cap \Pi_{XZ} = \{(0, q, 0)\}$, para algum $q \in \mathbb{R}$. Logo, a segunda coordenada de cada ponto $Q = (x, y, z)$ de Q deve ser constante e igual a q .
- Logo, a equação cartesiana de $Q = \{(x, q, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$ é $y = q$
- Finalmente, um plano R é paralelo ao plano Π_{YZ} se, e somente se, é perpendicular ao eixo OX . Se $R \cap OX = \{(r, 0, 0)\}$, então os pontos de R são (r, y, z) , com $y, z \in \mathbb{R}$. A equação cartesiana de R é $x = r$