Notas sobre Indução

Prof.: Rossini Monteiro

Métodos de Prova

Provando teoremas

- Muitos teoremas são da forma $P \rightarrow Q$
- Vamos fazer um resumo das principais técnicas para provar uma sentença da forma $P \rightarrow Q$

Provando $P \rightarrow Q$
Demonstração por exaustão

- Demonstre $P \rightarrow Q$ para todos os casos possíveis;
- Útil apenas para um número finito de casos.
- Exemplo:
  - Se um inteiro entre 1 e 20 é divisível por 6, então ele também é divisível por 3.

Provando $P \rightarrow Q$
Prova direta

- Suponha P, deduza Q;
- Abordagem padrão.
- Exemplo:
  - Se x é um inteiro par e y é um inteiro par, então o produto xy é um inteiro par.

Provando P → Q

Prova por contraposição

- Suponha ¬Q, deduza ¬P
- Usada quando ¬Q parece mais fácil de provar do que P.
- Exemplo:
  - Se n + 1 senhas forem distribuídas a n alunos, então algum aluno recebe duas ou mais senhas.
- Prova
  - Se todo aluno recebe menos que duas senhas então não foram distribuídas n + 1 senhas.

Provando P → Q

Prova por absurdo

- Negue P → Q;
- Logo, você supõe que P ^ ¬Q é verdade;
- Deduza uma contradição;
- P → Q é provado.
- Exemplo:
  - Se um número somado a ele mesmo é igual a ele mesmo, então esse número é zero.

1. $x + x = x$
2. $x \neq 0$
3. De 1 $2x = x$
4. Como de 2 temos $x \neq 0$, então de 2 e de 3 temos $\frac{2x}{x} = \frac{x}{x}$
5. Logo de 4 concluimos uma contradição: $2 = 1$

Indução Matemática
Motivação

- Útil para provar propriedades sobre os inteiros não negativos, ou um subconjunto infinito dos inteiros.
- Utilizada também em provas de complexidade de algoritmos, em teoria da computação, etc.

Indução Matemática
Intuição

- Considere uma escada com uma quantidade infinita de degraus a as seguintes premissas:
  1. Você pode subir o primeiro degrau;
  2. Se você chega em um degrau, então você pode passar para o degrau seguinte.
- Será que você conseguiria subir um degrau arbitrariamente alto?

Indução Matemática
Formalizando o nosso exemplo

- Vamos numerar os degraus: 1,2,3...
- Vamos considerar uma propriedade P específica que um número inteiro pode ter. Usamos a notação: P(n) para denotar que n sendo inteiro tem a propriedade P.
- No nosso caso, P(n) significa **posso subir o degrau** n.
- Assim formalizamos as duas premissas:
  1. P(1) (posso subir o primeiro degrau);
  2. $P(k) \rightarrow P(k + 1)$ (se subo o k-ésimo degrau então subo o próximo)

Indução Matemática
O princípio da indução matemática

- Como podemos provar que para todos os inteiros positivos n nós temos P(n)?
  1. **Passo básico ou base da indução**: Provamos P(1). Ou seja, demonstramos que a propriedade é válida para o número 1.
  2. **Passo indutivo**: Provamos P(k) ! P(k + 1). Como?
     1. Assumimos que P(k) é verdade. P(k) é chamada de **hipótese de indução** ou **suposição indutiva**.
     2. Provamos que P(k + 1) é verdade usando a hipótese de indução na prova.
- Assim provamos $\forall n P(n)$, n inteiro positivo. Da mesma forma que provamos que podemos subir um degrau arbitrariamente alto.

Indução Matemática
Exemplos

- Mostre que a soma dos n primeiros números ímpares é igual a n^2.
- Prove que para $n \geq 1$, $1 + 2^1 + 2^2 + . . . + 2^n = 2^{n+1} - 1$
- Prove que para $n \geq 1$, $2^n > n$.

Exemplo

- Prove que o conjunto das partes de um conjunto com n elementos possui 2^n elementos.
- Base
  - Se $| A |= 0$, então $P(A) = \{ \emptyset\}$, logo P(A) possui apenas um elemento, $1 = 2^0$.
- H.I.
  - Se A tem n elementos, então P(A) tem 2^n elementos.
- n+1
  - Precisamos provar que: Se B é um conjunto com n + 1 elementos então P(B) tem 2^{n+1} elementos.
- 1 Se $| B |= n + 1$ então ele pode ser escrito da forma $B = A \cup \{b\}$, já que pela H.I., $| A |= n$.
- 2 Para cada subconjunto S de A existem 2 subconjuntos de B: S e $S \cup \{b\}$.
- 3 Logo, $| P(B) |= 2. | P(A) |= 2.2^n = 2^{n+1}$.

Exercícios

- Use indução matemática para provar que as proposições dadas são verdadeiras para todo inteiro positivo n*.*
- $2 + 6 + 10 + ... + (4n - 2) = 2n^2$

Solução

Base de Indução - P(1)

Verifique que a propriedade vale para $n = 1$:

$2 = 2(1)^2$

Hipótese de Indução - P(k)

Suponha que a propriedade vale para $n = k$: $2 + 6 + 10 + ... + (4k - 2)= 2k^2$

Passo de Indução - P(*k* + 1)

Prove que a propriedade vale para $n = k + 1$:

$2 + 6 +10 + ... + [4(k +1)- 2]= 2(k+1)^2$

Solução

$$P(k+1) = 2+6+10+...+[4(k+1)-2] =$$

$$2+6+10+...+(4k-2)+[4(k+1)-2] \overset{HI}{=}$$

$$2k^2 + [4(k+1)-2] =$$

$$2k^2 + 4k + 4 - 2 =$$

$$2k^2 + 4k + 2 =$$

$$2(k^2 + 2k + 1) =$$

$$2(k+1)^2$$