

Teoria dos Conjuntos

FBV

Prof. Rossini Bezerra

Introdução

- Os resultados do trabalho de Georg Ferdinand Ludwig Phillip Cantor estabeleceram a **teoria de conjuntos** como uma disciplina matemática completamente desenvolvida e de profundos efeitos de ensino.
- Esta teoria baseia-se em **três noções primitivas** que são:
 - **Conjuntos,**
 - **Elementos e**
 - **Relação de pertinência.**



Noções Primitivas

2.1. CONJUNTOS: Coleções, classes ou agrupamentos de objetos.

Obs: devemos indicar um conjunto por uma letra maiúscula de nosso alfabeto (A, B, C, D, E, ...)

2.2. ELEMENTOS: é cada objeto de uma coleção.

Obs: devemos indicar um elemento por uma letra minúscula de nosso alfabeto (a, b, c, d, e, ...)

2.3. RELAÇÃO DE PERTINÊNCIA:

Os símbolos ao lado, são usados para relacionar apenas elementos com conjuntos.

∈

(Pertence)

∉

(Não pertence)

Representação de Conjuntos

3.1. Forma Tabular ou Enumerativa:

Escrevemos os elementos entre chaves e separados por vírgulas.

Exemplo:

a) Conjunto V das vogais.

$$V = \{a, e, i, o, u\} \quad (\textit{conjunto finito})$$

b) Conjunto P dos números primos positivos.

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\} \quad (\textit{conjunto infinito})$$

c) Conjunto U dos números pares primos positivos.

$$U = \{2\}$$

d) Conjunto G das cores da bandeira brasileira que começam com a

letra m.

$$G = \{ \}$$

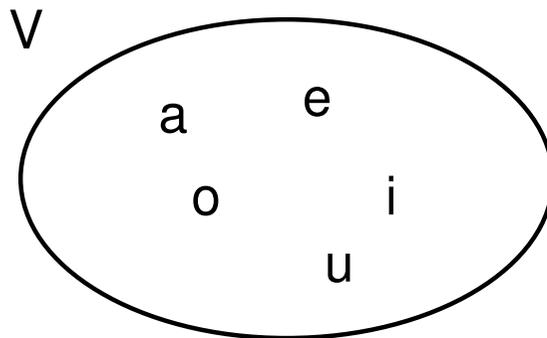
Representação de Conjuntos

3.2. Diagrama de Venn:

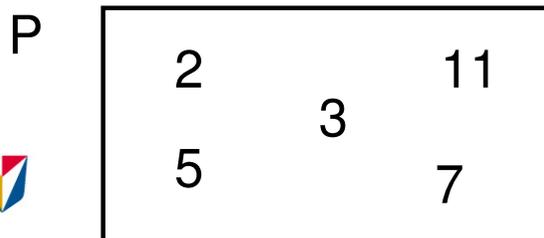
Escrevemos os elementos no interior de uma figura geométrica.

Exemplo:

a) Conjunto V das vogais.



b) Conjunto P dos números primos positivos.



Representação de Conjuntos

3.3. Propriedade Característica:

Representamos o conjunto através de uma propriedade característica de seus elementos.

Exemplo:

a) Conjunto V das vogais.

$$V = \{x \mid x \text{ é vogal}\} = \{a, e, i, o, u\}$$

b) Conjunto P dos números primos positivos.

$$P = \{x \mid x \text{ é número primo positivo}\} = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$$

c) Conjunto U dos números pares primos positivos.

$$U = \{x \mid x \text{ é número par primo positivo}\} = \{2\}$$

d) Conjunto Solução S da equação do 1º grau $5x - 10 = 0$.

Conjuntos Iguais

Dizemos que dois ou mais conjuntos são iguais se eles possuem os mesmos elementos.

Exemplo:

$$U = \{x \mid x \text{ é número par primo positivo}\} = \{2\}$$

$$S = \{x \in R \mid 5x - 10 = 0\} \quad S = \{2\}$$

A repetição de elementos não altera um conjunto. Assim:

$$\{b, c, c, c, d, e, e\} = \{b, c, d, e\}$$

A ordem dos elementos não altera um conjunto. Assim:

$$\{g, o, l\} = \{l, o, g, o\} \text{ e } \{f, i, a, t\} = \{f, a, t, i, a\}$$

Tipos de Conjuntos

5.1. Conjunto Unitário:

É aquele que apresenta um único elemento.

Exemplo:

$$a) V = \{x \in R \mid 3x - 12 = 0\} = \{4\}$$

$$b) U = \{x \mid x \text{ é número par positivo e primo}\} = \{2\}$$

5.2. Conjunto Vazio:

É aquele que não apresenta elemento algum e é indicado por $\{ \}$ ou \emptyset

Tipos de Conjuntos

Exemplo:

$$D = \{x \in N \mid x > 0 \text{ e } x < 0\} = \{ \}$$

Um conjunto vazio sempre é dado por uma propriedade logicamente falsa. O conjunto $\{\emptyset\}$ representa um conjunto unitário e não um conjunto vazio.

Conjuntos Universo

É aquele que limita os elementos que podem ser soluções de um determinado problema.

Exemplo:

Verifique se os conjuntos $A = \{x \in R \mid 2x^2 - 5x + 2 = 0\}$ e $B = \{x \in N \mid 2x^2 - 5x + 2 = 0\}$ são iguais.

Subconjuntos

Dados dois conjuntos A e B , dizemos que A é um subconjunto de B se, e somente se, para todo elemento x pertencente ao conjunto A , x pertence também a B .

Podemos dizer a mesma coisa de quatro maneiras diferentes.

A é *subconjunto* de B .

A é *parte* de B .

A *está contido* em B .

$$A \subset B$$

B *contém* A .

$$B \supset A$$

Subconjuntos

Exemplo:

Escrever todos os subconjuntos do conjunto $A = \{0, 5, 7, 9\}$.

-Subconjunto com nenhum elemento: \emptyset

-Subconjuntos com um elemento: $\{0\}$; $\{5\}$; $\{7\}$; $\{9\}$

-Subconjuntos com dois elementos: $\{0,5\}$; $\{0,7\}$; $\{0,9\}$; $\{5,7\}$; $\{5,9\}$; $\{7,9\}$

-Subconjuntos com três elementos: $\{0,5,7\}$; $\{0,5,9\}$; $\{0,7,9\}$; $\{5,7,9\}$

-Subconjuntos com quatro elementos: $\{0,5,7,9\}$

O número total de subconjuntos é igual a 16.

Conjuntos das Partes

Conjunto das partes de um conjunto A , indicado por $P(A)$, é aquele formado por todos subconjuntos que se pode formar a partir do conjunto A .

Exemplo:

Escrever o conjunto das partes de cada conjunto a seguir.

a) $B = \{a, b, c\}$.

b) $F = \emptyset$

Exercícios

Sendo $A = \{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ podemos afirmar que:

(A) $\{1\} \notin A.$

(B) $\{1\} \subset A.$

(C) $\{1\} \cap \{2\} \notin A.$

(D) $2 \in A.$

(E) $\{1\} \cup \{2\} \in A.$

Exercícios

Seja C_1 o conjunto das soluções do sistema $\begin{cases} 2x + 4y = 9 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$ e C_2 o conjunto das soluções

do sistema $\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x + 2y = 16 \end{cases}$. Temos então:

- (A) $C_1 = C_2$
- (B) $C_1 \cap C_2 = \{ \}$
- (C) $C_1 \subset C_2$
- (D) $C_2 \subset C_1$
- (E) $C_1 \cup C_2 = C_1$

Operações entre Conjuntos

9.1. União:

Dados dois conjuntos A e B chama-se união (ou reunião) entre A e B ao conjunto formado pelos elementos de A ou B.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Exemplo:

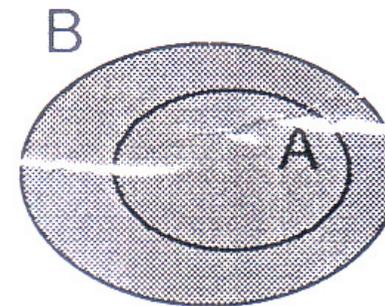
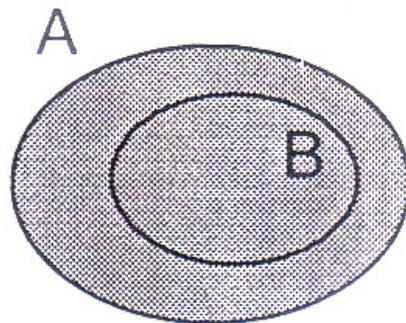
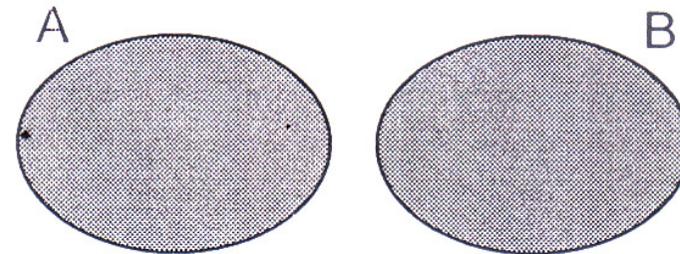
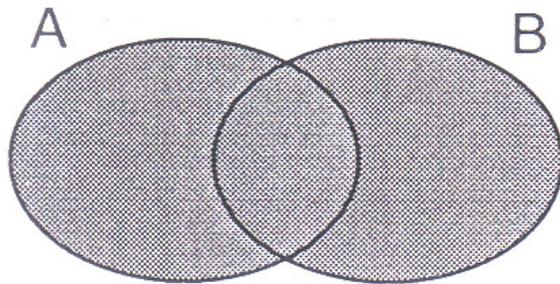
$$A = \{0, 2, 4, 6, 7, 8\}$$

$$B = \{3, 4, 6, 9\}$$

$$A \cup B = \{0, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$$

Operações entre Conjuntos

Diagramas de Venn representativos da união entre A e B.



$$B \subset A \text{ logo, } A \cup B = A$$

$$A \subset B \text{ logo, } A \cup B = B$$

Operações entre Conjuntos

9.2. Intersecção:

Dados dois conjuntos A e B chama-se intersecção entre A e B ao conjunto formado pelos elementos comuns entre A e B, isto é, pelos elementos que Pertencem ao conjunto A e ao conjunto B.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Exemplo:

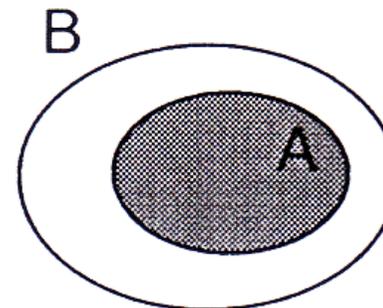
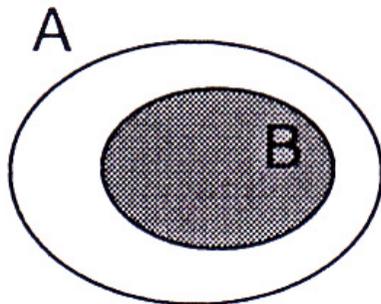
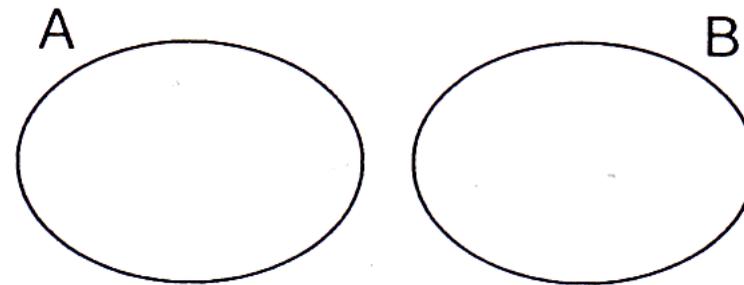
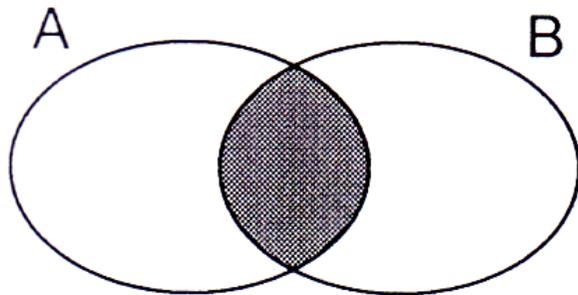
$$A = \{0, 2, 4, 6, 7, 8\}$$

$$B = \{3, 4, 6, 9\}$$

$$A \cap B = \{4, 6\}$$

Operações entre Conjuntos

Diagramas de Venn representativos da intersecção entre A e B.



$$B \subset A \text{ logo, } A \cap B = B$$

$$A \subset B \text{ logo, } A \cap B = A$$

Operações entre Conjuntos

9.3. Diferença:

Dados dois conjuntos A e B chama-se diferença entre A e B ao conjunto formado pelos elementos do conjunto A que não pertencem ao conjunto B.

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

$$B - A = \{x \mid x \in B \text{ e } x \notin A\}$$

Exemplo:

$$A = \{0, 2, 4, 6, 7, 8\}$$

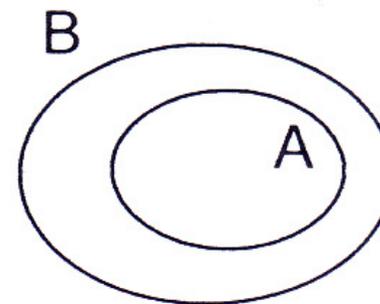
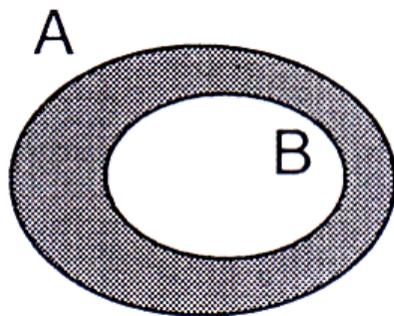
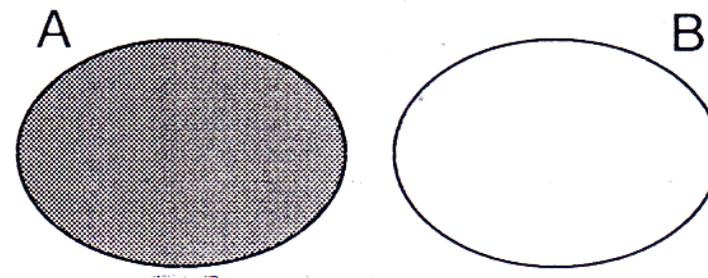
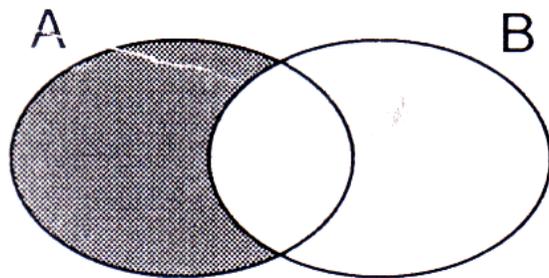
$$B = \{3, 4, 6, 9\}$$

$$A - B = \{0, 2, 7, 8\}$$

$$B - A = \{3, 9\}$$

Operações entre Conjuntos

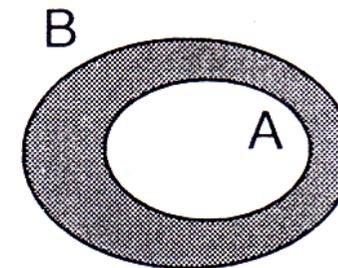
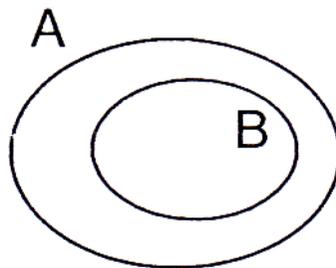
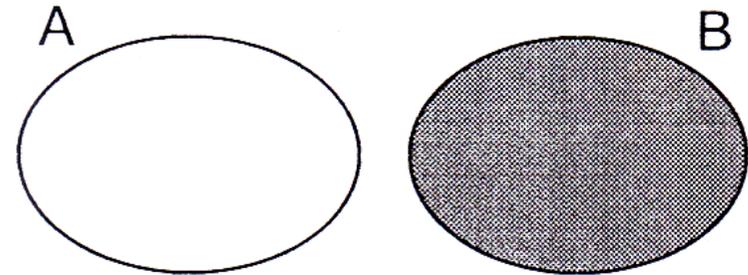
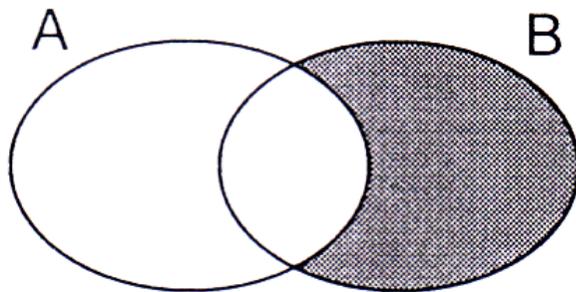
Diagramas de Venn representativos de $A - B$.



$$A \subset B \text{ logo, } A - B = \emptyset$$

Operações entre Conjuntos

Diagramas de Venn representativos de $B - A$.



$$B \subset A \text{ logo, } B - A = \emptyset$$

Operações entre Conjuntos

9.3.1. Complementar:

Sejam dois conjuntos A e B tais que $B \subset A$, chama-se complementar de B em relação a A ao conjunto $A - B$.

$$C_A^B = A - B, \text{ se } B \subset A$$

Exemplo:

$$A = \{0, 2, 4, 6, 7, 8\}$$

$$B = \{4, 6, 7\}$$

$$C_A^B = A - B = \{0, 2, 8\}$$

Operações entre Conjuntos

Exemplo:

$$A = \{3, 5, 7, 9\}$$

$$B = \{5, 6, 7\}$$

Como o conjunto B não está contido no conjunto A dizemos que o complementar de B em relação a A não existe.

Se $B \not\subset A$, dizemos que o complementar C_A^B não existe.

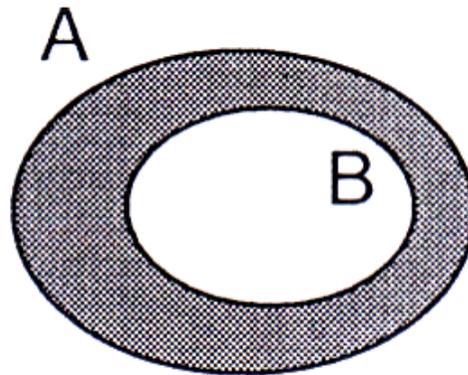
Se $A = B$, o complementar é vazio: $C_A^A = C_B^B = \{ \}$.

Se $B \subset A$, podemos indicar o complementar de B em relação a A por \overline{B} .

$$C_A^B = \overline{B}.$$

Operações entre Conjuntos

Diagrama de Venn para C_A^B



Problema envolvendo Conjuntos

11.1. Cardinal de um Conjunto.

11.2. Fórmula para a Resolução de Problemas.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Problema envolvendo Conjuntos

11.3. Problemas Envolvendo Conjuntos.

Exemplos:

As provas de recuperação em matemática e física de uma escola foram feitas no mesmo dia e durante a prova, observou-se a presença de 42 alunos. Sabendo-se que 25 alunos fizeram a prova de matemática e 32 fizeram a de física, determine:

- O número de alunos que fizeram as duas provas;
- O número de alunos que fizeram apenas a prova de matemática;
- O número de alunos que fizeram apenas a prova de física.

Problema envolvendo Conjuntos

Numa pesquisa sobre a qualidade dos serviços oferecidos pelas empresas de fornecimento de água (A), energia elétrica (E) e TV por assinatura (T) de um bairro, obteve-se um grande número de reclamações.

A tabela a seguir expressa o número de reclamações de 300 entrevistados durante a pesquisa

Serviços	A	E	T	A e E	E e T	A e T	A, E e T
Reclamações	160	180	190	120	100	110	90

Com base na tabela, determine:

- O número de pessoas que não reclamaram de nenhum serviço;
- O número de entrevistados que reclamaram apenas do serviço oferecido pela empresa de fornecimento de água;
- O número de entrevistados que reclamaram de apenas um serviço;
- O número de entrevistados que reclamaram de pelo menos dois serviços.