Funções, Seqüências, Cardinalidade

Prof.: Rossini Monteiro

Noções Básicas

- Definição (Função)
  - Sejam A e B conjuntos. Uma função de A em B é um mapeamento de exatamente um elemento de B para cada elemento de A.
  - Podemos dá uma definição alternativa: uma função de A em B é um subconjunto de $A \times B$, onde cada elemento de A aparece exatamente uma única vez como primeiro componente do par ordenado.
  - Escrevemos $f(a) = b$, se b é o único elemento de B associado pela função f ao elemento a de A. Se f é uma função de A em B, escrevemos $f : A \rightarrow B$.

Noções Básicas

- Definição (domínio, imagem)
  - Se f é uma função de A em B dizemos que A é o **domínio** de f e B é o **contradomínio** de f.
  - Se f (*a*) = b, dizemos que b é a **imagem** de a e *a* é a **pré-imagem** de b.
  - O **conjunto imagem**, denotado por I, de f é o conjunto de todas as imagens dos elementos de A.

Noções Básicas

- A definição completa de uma função requer que se forneça seu domínio, seu contradomínio e a associação (ou mapeamento).
- Essa última pode ser fornecida através de:
  - uma descrição verbal;
  - um gráfico;
  - uma equação;
  - ou uma coleção de pares ordenados.
- Seja $S \in A$ e seja $f : A \rightarrow B$. A imagem de S é o subconjunto de B que contem as imagens dos elementos de S.
- Denotamos a imagem de S por f (S), de forma que $f(S) = \{f(s) \mid s \in S\}$.

Noções Básicas

- Definição (função sobrejetora)
  - Uma função $f : A \to B$ é sobrejetora (ou sobrejetiva) se o conjunto imagem de f é igual ao seu contradomínio.
- Definição (função injetora)
  - Uma função $f : A \to B$ é injetora (ou injetiva, ou um-para-um) se nenhum elemento de B for imagem por f de dois elementos distintos de A.
- Definição (função bijetora)
  - Uma função $f : A \to B$ é bijetora (ou bijetiva) se for ao mesmo tempo injetora e sobrejetora.

Funções inversas

- Definição (Função inversa)
  - Seja f uma função bijetora de um conjunto S para um conjunto B. A função inversa de f , denotada por f^{-1}, é a função que associa a um elemento $b \in B$, um único elemento $a \in A$, de forma que se f (a) = b, então f–1(b) = a.
- Exemplo
  - Seja f a função de {a, b, c} em {1, 2, 3} de forma que f (a) = 2, f (b) = 3, e f (c) = 1. A função f é **inversível**? Em caso afirmativo, qual é a sua inversa?
- Exemplo
  - Seja $f : Z \to Z$ de forma que f (x) = x + 1 Essa função possui inversa? Em caso afirmativo, qual a sua inversa?

Função Composta

- Definição (composição de funções)
  – Seja g uma função de A em B e seja f uma função de B em C.
  – A composição das funções f e g, também chamada da função composta de f com g. denotada por $f \circ g$ é definida como a seguir:
- $(f \circ g)(a) = f(g(a))$

Algumas funções importantes

- Definição (função piso e teto)
  – A função **piso** associa ao número real x o maior inteiro que é menor ou igual a x.
  – O valor da função piso em x é denotado por $\lfloor x \rfloor$
  – A função **teto** associa ao número real x o menor inteiro que é maior ou igual a x. O valor da função teto em x é denotado por $\lceil x \rceil$.
- Exemplo
  – $\lfloor 0.5 \rfloor = 0$, $\lceil 0,5 \rceil = 1$, $\lfloor -0.5 \rfloor = -1$, $\lceil -0,5 \rceil = 0$, $\lceil 5 \rceil = 5$, $\lfloor 5 \rfloor = 5$

Exercícios

- Determine quais das seguintes funções de Z → Z são injetoras:
  - f (x) = x – 1
  - f (x) = x2 + 1
  - f (x) = $\lceil x/2 \rceil$
- Quais das funções anteriores são sobrejetoras?
- Se f e f g são injetoras, então g é injetora também? Apresente uma prova para justificar a sua resposta.

Seqüências

- Uma seqüência e uma estrutura discreta usada para representar listas ordenadas
- Definição 1
  - Uma seqüência e uma função de um subconjunto do conjunto dos inteiros (usualmente {0; 1; 2; 3; ...} ou {1; 2; 3; ...}) em um conjunto S.
  - Usamos a notação a_n para denotar a imagem do inteiro n. Chamamos a_n um termo da seqüência.

Seqüências - Exemplos

- 1; 5; 25; 125; 625; ...
- 1;-1; 1;-1;1; ...
- Considere as seguintes seqüências $\{a_n\}$, onde
  - 1. $a_n = 6n$
  - 2. $a_n = 2n + 1$
  - 3. $a_n = 10n$
  - 4. $a_n = 5$
  - Liste os primeiros 3 elementos de cada uma delas.
- Seqüências finitas $a_1; a_2; ...; a_n$ são frequentemente usadas em computação;
- As cadeias (strings) são seqüências finitas também denotadas por $a_1a_2a_{3...}a_n$.
  - Ex: cadeias de bits. O seu tamanho é n, ou o número de termos da seqüêencia, ou da cadeia.
- A cadeia vazia não possui termos, seu tamanho e igual a zero.

Seqüências especiais

- Como definir uma formula ou regra geral para construir os termos de uma seqüência?
- Algumas perguntas úteis:
  - Os termos são obtidos de termos anteriores pela soma de algum valor ou que depende da posição dos termos?
  - Os termos são obtidos de termos anteriores pela multiplicação de algum valor?
  - Os termos são obtidos pela combinação de termos anteriores de uma forma particular?

Algumas seqüências úteis

1. n^2 : 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; 100; ...
2. n^3 : 1; 8; 27; 64; 125; 216; 343; 512; 729; 1000;...
3. 2n : 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128; 246; 512; 1024; ...
4. 3n : 3; 9; 27; 81; 243; 729; 2187; 6561; 19683;...
5. n! : 1; 2; 6; 24; 120; 720; 5040; 40320; 362880; ...

Cardinalidade

- Denição 2 (Cardinalidade)
  - Os conjuntos A e B possuem a mesma cardinalidade se e somente se existe uma bijeção entre A e B.
- Denição 3 (Conjunto enumeravel (ou contavel))
  - Um conjunto que é finito ou possui a mesma cardinalidade dos numeros naturais e chamado de enumeravel (ou contavel), caso contrario ele e dito não enumeravel.
- Exemplo 4
  - Mostre que o conjunto dos ímpares positivos e enumeravel.
- Exemplo 5
  - Mostre que o conjunto dos numeros reais não e enumeravel.