Conceitos Básicos da Teoria de Grafos

Prof. Rossini

GRAFO

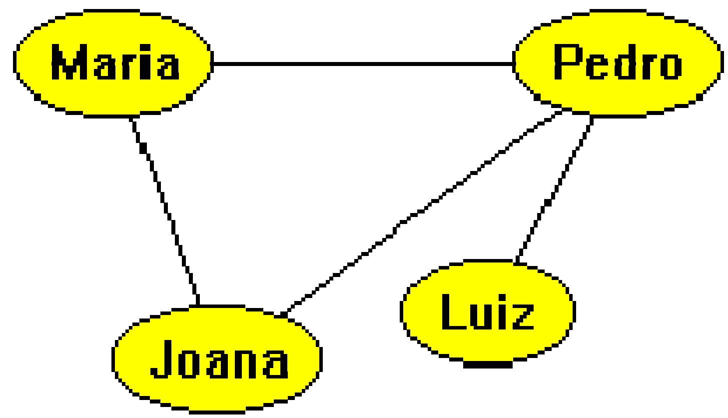
- Um grafo *G(V,A)* é definido pelo par de conjuntos *V* e *A*, onde:
- V - conjunto não vazio: os **vértices** ou **nodos** do grafo;
- A - conjunto de pares ordenados *a*=(v,w), v e w Î V: as **arestas** do grafo.
- Seja, por exemplo, o grafo G(V,A) dado por:
- V = { p | p é uma pessoa }
  A = { (v,w) | < v é amigo de w > }

EXEMPLO

- Esta definição representa toda uma família de grafos. Um exemplo de elemento desta família (ver G1) é dado por:
- V = {Maria, Pedro, Joana, Luiz}

  A = {(Maria, Pedro) , (Joana, Maria) , (Pedro, Luiz) , (Joana, Pedro) }

G1

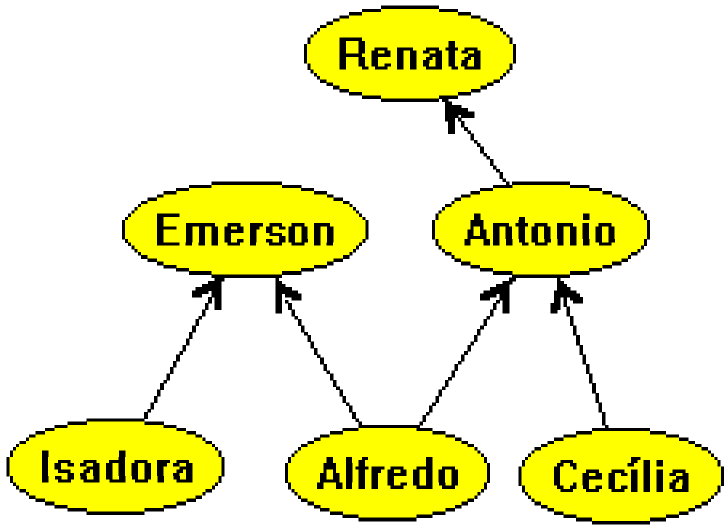


Neste exemplo estamos considerando que a relação *<v é amigo de w>* é uma **relação simétrica**, ou seja, se *<v é amigo de w>* então *<w é amigo de v>*. Como conseqüência, as arestas que ligam os vértices não possuem qualquer orientação

DIGRAFO (Grafo Orientado)

- Considere, agora, o grafo definido por:
- V = { p | p é uma pessoa da família Castro }
- A = { (v,w) | < v é pai/mãe de w > }
- Um exemplo de deste grafo (ver G2) é: V = { Emerson, Isadora, Renata, Antonio, Rosane, Cecília, Alfredo } A = {(Isadora, Emerson), (Antonio, Renata), (Alfredo, Emerson), (Cecília, Antonio), (Alfredo, Antonio)}

G2:



DIGRAFO (Grafo Orientado)

- A relação definida por *A* **não é simétrica** pois se *<v é pai/mãe de w>*, não é o caso de *<w é pai/mãe de v>.*
- Há, portanto, uma orientação na relação, com um correspondente efeito na representação gráfica de G.
- O grafo anterior é dito ser um **grafo orientado** (ou **digrafo**),
- Sendo que as conexões entre os vértices são chamadas de **arcos**.

ORDEM

- A ordem de um grafo *G* é dada pela cardinalidade do conjunto de vértices, ou seja, pelo número de vértices de *G*. Nos exemplos ao lado:

- ordem($G1$) = 4

- ordem($G2$) = 6

ADJACÊNCIA

- Em um grafo simples (a exemplo de *G*1) dois vértices *v* e *w* são adjacentes (ou vizinhos) se há uma aresta *a*=(*v*,*w*) em G.
- Está aresta é dita ser incidente a ambos, *v* e *w*.
- É o caso dos vértices *Maria* e *Pedro* em *G*1.
- No caso do grafo ser dirigido (a exemplo de *G*2), a adjacência (vizinhança) é especializada em:
  - **Sucessor**: um vértice *w* é sucessor de *v* se há um arco que parte de *v* e chega em *w*.
    - Em *G*2, por exemplo, diz-se que *Emerson* e *Antonio* são sucessores de *Alfredo*.
  - **Antecessor**: um vértice *v* é antecessor de *w* se há um arco que parte de *v* e chega em *w*.
    - Em *G*2, por exemplo, diz-se que *Alfredo* e *Cecília* são antecessores de *Antonio*.

GRAU

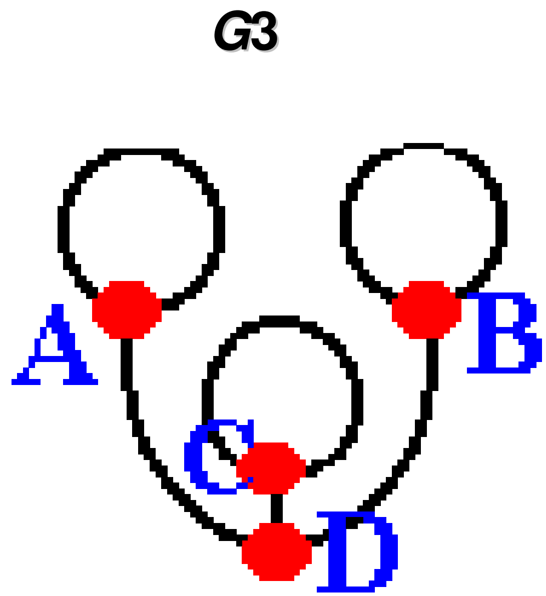
- O grau de um vértice é dado pelo número de arestas que lhe são incidentes.
- Em *G*1, por exemplo:
  - grau(*Pedro*) = 3
  - grau(*Maria*) = 2
- No caso do grafo ser dirigido (a exemplo de *G*2), a noção de grau é especializada em:
  - **Grau de emissão**: o grau de emissão de um vértice *v* corresponde ao número de arcos que partem de *v*.
    - Em *G*2, por exemplo:
      - grauDeEmissão(*Antonio*) = 1
      - grauDeEmissao(*Alfredo*) = 2
      - grauDeEmissao(*Renata*) = 0
  - **Grau de recepção**: o grau de recepção de um vértice *v* corresponde ao número de arcos que chegam a *v*.
    - Em *G*2, por exemplo:
      - grauDeRecepção(*Antonio*) = 2
      - grauDeRecepção(*Alfredo*) = 0
      - grauDeRecepção(*Renata*) = 1

FONTE / SUMIDOURO

- Fonte
  - Um vértice *v* é uma fonte se grauDeRecepção(*v*) = 0.
    - É o caso dos vértices *Isadora*, *Alfredo* e *Cecília* em *G*2.
- Sumidouro
  - Um vértice *v* é um sumidouro se grauDeEmissão(*v*) = 0.
    - É o caso dos vértices *Renata* e *Emerson* em *G*2.

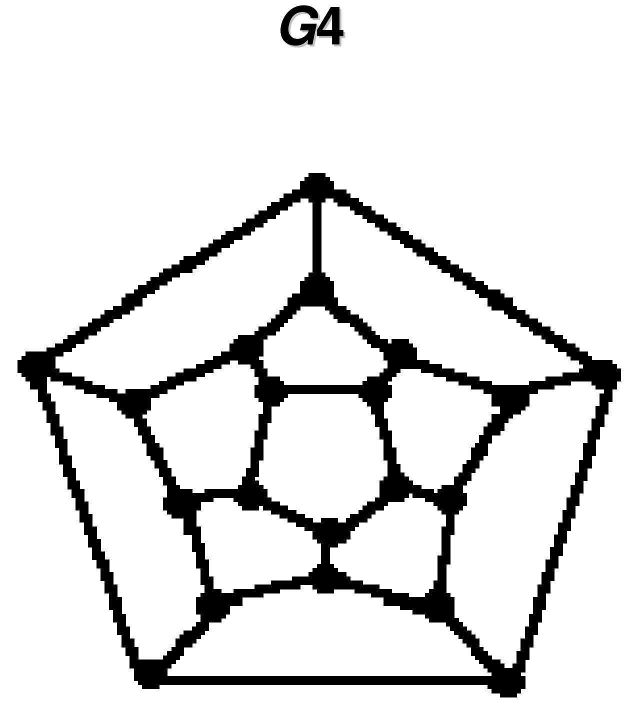
LAÇO

- Um laço é uma aresta ou arco do tipo $a=(v,v)$, ou seja, que relaciona um vértice a ele próprio.
  - Em *G*3 há três ocorrências de laços para um grafo não orientado



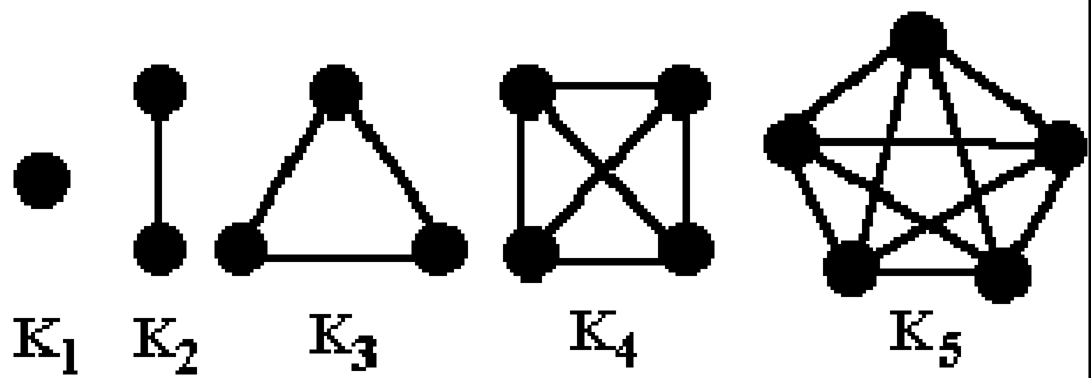
GRAFO REGULAR

- Um grafo é dito ser regular quando todos os seus vértices tem o mesmo grau.
- O grafo *G*4, por exemplo, é dito ser um grafo regular-3 pois todos os seus vértices tem grau 3.



GRAFO COMPLETO

- Um grafo é dito ser completo quando há uma aresta entre cada par de seus vértices.
- Estes grafos são designados por *K*n, onde *n* é a ordem do grafo.
- Um grafo *K*n possui o número máximo possível de arestas para um dados *n*.
- Ele é, também regular-(n-1) pois todos os seus vértices tem grau *n-1*.



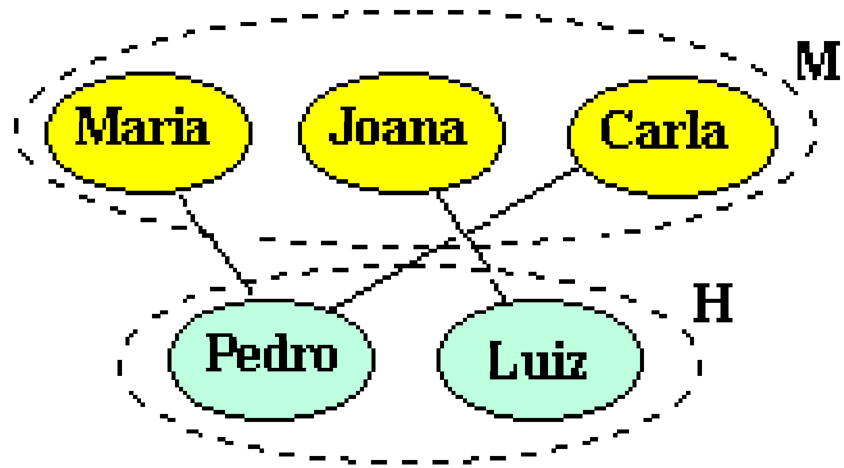
GRAFO BIPARTIDO

- Um grafo é dito ser bipartido quando seu conjunto de vértices V puder ser particionado em dois subconjuntos $V1$ e $V2$, tais que toda aresta de G une um vértice de $V1$ a outro de $V2$.

GRAFO BIPARTIDO- EXEMPLO

- Sejam os conjuntos
  - *H*={h | h é um homem} e
  - *M*={m | h é um mulher} e o
- Grafo *G*(*V,A*) (ver o exemplo *G*5) onde:
  - *V* = *H* U *M*
  - A = {(v,w) | (v ∈ *H* e w ∈ *M*) ou (v ∈ *M* e w ∈ *H*) e <v foi namorado de w>}

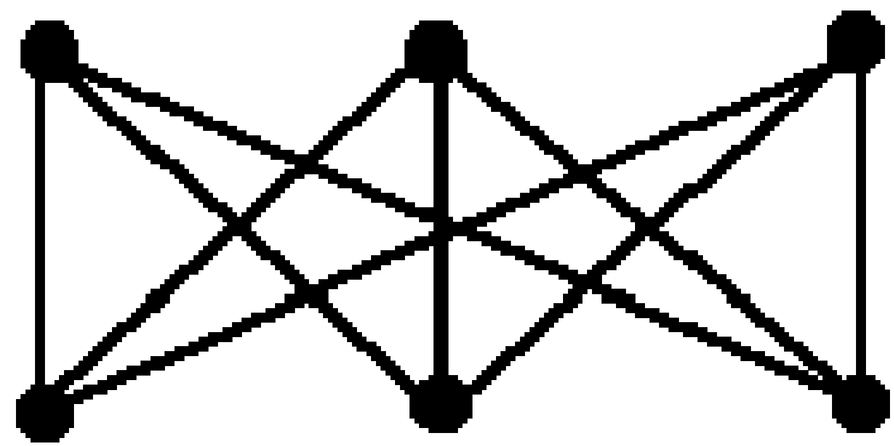
G5



BIPARTIDO COMPLETO

- O grafo *G*6 é uma $K_{3,3}$,
- Ou seja, um grafo **bipartido completo** que contém duas partições de 3 vértices cada.
- Ele é completo pois todos os vértices de uma partição estão ligados a todos os vértices da outra partição.

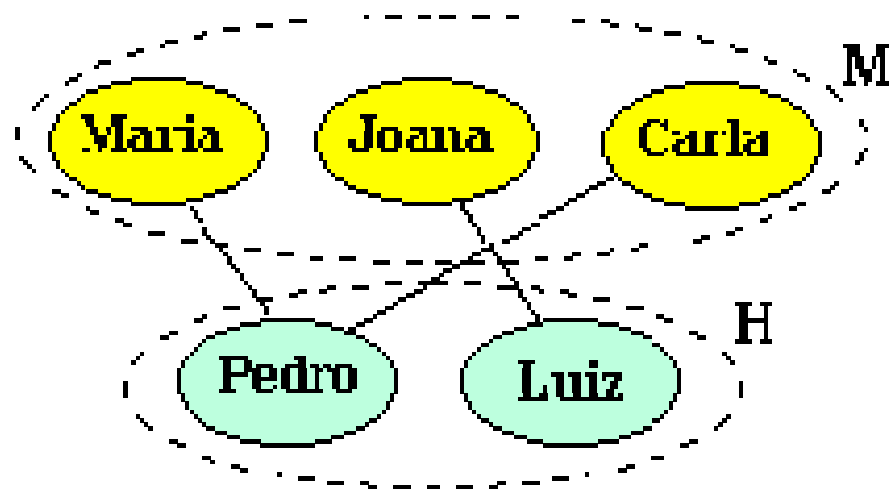
$K_{3,3}$



GRAFO ROTULADO

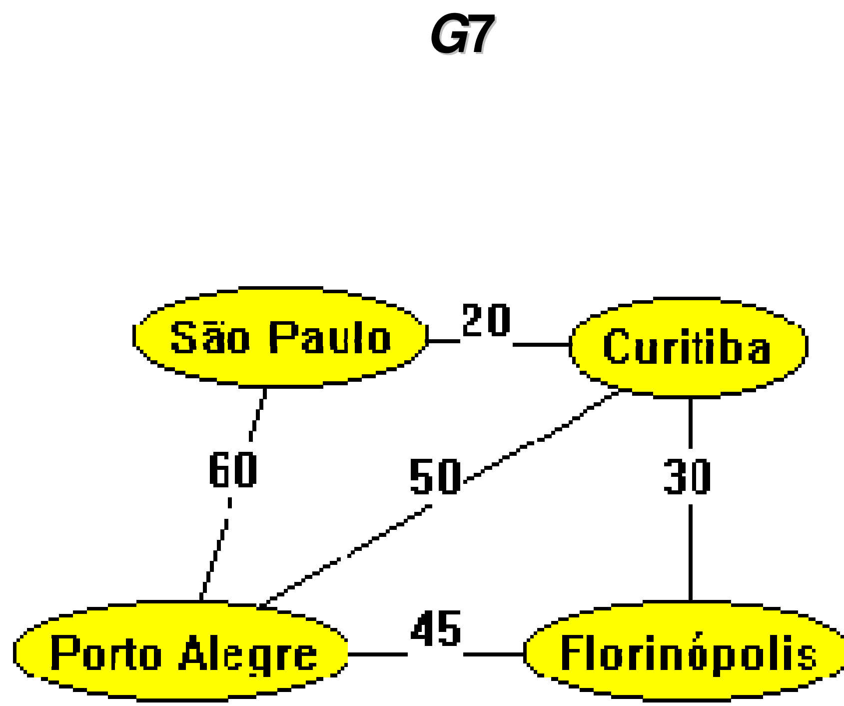
- Um grafo *G*(*V*,*A*) é dito ser rotulado em vértices (ou arestas) quando:
  - a cada vértice (ou aresta) estiver associado um rótulo.
    - *G*5 é um exemplo de grafo rotulado

G5



GRAFO VALORADO

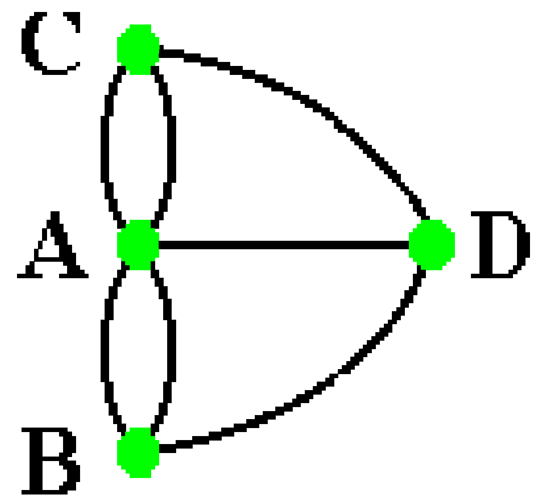
- Um grafo $G(V,A)$ é dito ser valorado quando existe uma ou mais funções relacionando V e/ou A com um conjunto de números.
- Para exemplificar (ver o grafo *G*7), seja $G(V,A)$ onde:
  - V = {v | v é uma cidade com aeroporto}
  - A = {(v,w,t) | <há linha aérea ligando *v* a *w*, sendo *t* o tempo esperado de voo>}



MULTIGRAFO

- Um grafo *G*(*V*,*A*) é dito ser um multigrafo quando existem múltiplas arestas entre pares de vértices de *G*.
- Exemplo: no grafo *G*8
- há duas arestas entre:
  - os vértices *A* e *C* e
  - os vértices *A* e *B*,
  - caracterizando-o como um multigrafo.

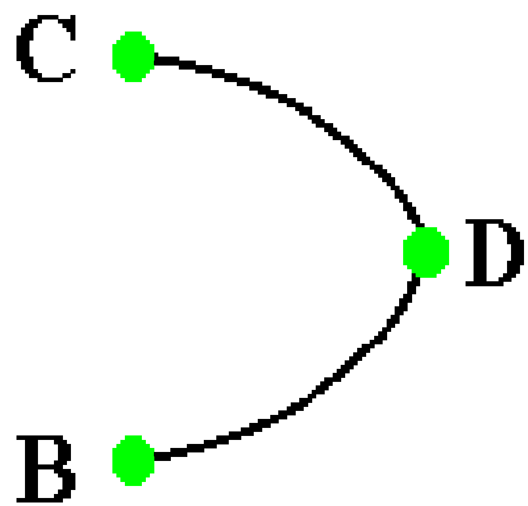
*G*8



SUBGRAFO

- Um grafo $G_s(V_s, A_s)$ é dito ser subgrafo de um grafo $G(V,A)$ quando $V_s \in V$ e $A_s \in A$.
- O grafo *G*9, por exemplo, é subgrafo de *G*8.

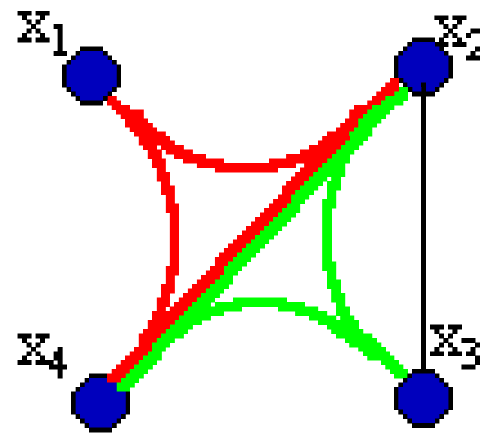
*G*9



HIPERGRAFO

- Um hipergrafo *H(V,A)* é definido pelo par de conjuntos *V* e *A*, onde:
  - *V* - conjunto não vazio;
  - *A* - uma família e partes não vazias de *V*.
- Exemplo: o grafo *H(V,A)* dado por:
- V = { x1, x2, x3, x4}
  A = { {x1, x2, x4}, {x2, x3, x4}, {x2, x3}}

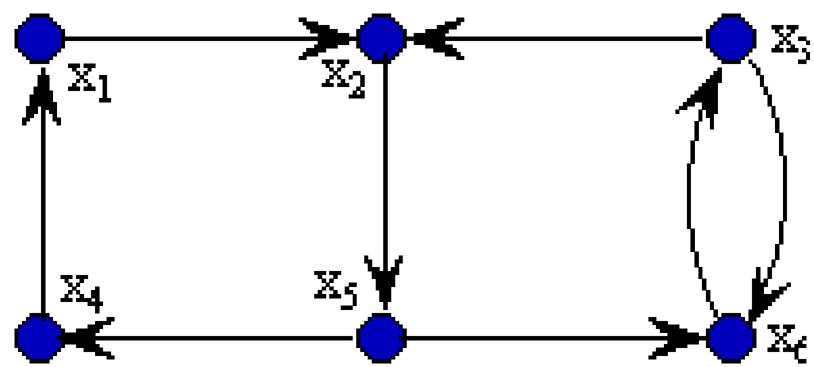
***G*10**



CADEIA

- Uma cadeia é uma seqüência qualquer de arestas adjacentes que ligam dois vértices.
- O conceito de cadeia vale também para grafos orientados, bastando que se ignore o sentido da orientação dos arcos.
- A seqüência de vértices (x_6, x_5, x_4, x_1) é um exemplo de cadeia em G11.

G11



CADEIA

- Uma cadeia é dita ser **elementar** se não passa duas vezes pelo mesmo vértice.
- É dita ser **simples** se não passa duas vezes pela mesma aresta (arco).
- O **comprimento** de uma cadeia é o número de arestas (arcos) que a compõe.

CAMINHO

- Um caminho é uma cadeia na qual todos os arcos possuem a mesma orientação.
- Aplica-se, portanto, somente a grafos orientados.
- A seqüência de vértices (x_1, x_2, x_5, x_6, x_3) é um exemplo de caminho em G_{11}

CICLO

- Um ciclo é uma cadeia simples e fechada (o vértice inicial é o mesmo que o vértice final).
- A seqüência de vértices (x_1, x_2, x_3, x_6, x_5, x_4, x_1) é um exemplo de ciclo elementar em G_{11}.

CIRCUITO

- Um circuito é um caminho simples e fechado.
- A seqüência de vértices $(x_1, x_2, x_5, x_4, x_1)$ é um exemplo de circuito elementar em G_{11}

FECHO TRANSITIVO DE UM VÉRTICE (*V*)

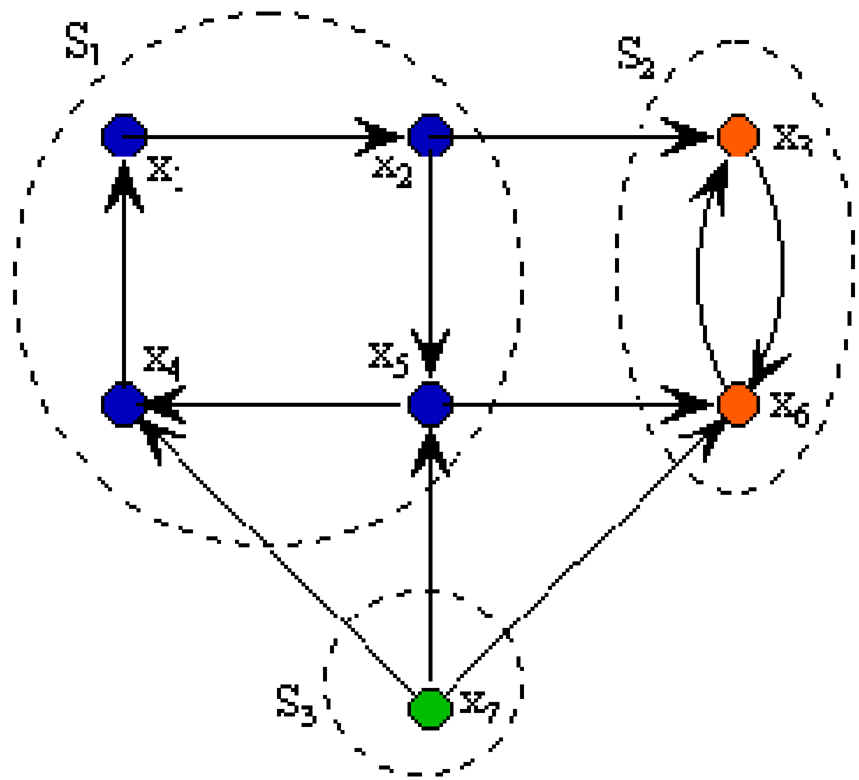
- O **fecho transitivo direto (ftd)**
  - É o conjunto de todos os vértices que podem ser atingidos por algum caminho iniciando em *v*

- O **fecho transitivo inverso (fti)**
  - É o conjunto de todos os vértices a partir dos quais se pode atingir *v* por algum caminho.

EXEMPLO

- O FTD do vértice x_5 do grafo G_{17}, por exemplo, é o conjunto: $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$.
  - Note que o próprio vértice faz parte do FTD já que ele é alcançável partindo-se dele mesmo.
- O FTI do vértice x_5 do grafo G_{17}, por exemplo, é o conjunto: $\{x_1, x_2, x_4, x_5, x_7\}$.
  - Note que o próprio vértice faz parte do FTI já que dele se pode alcançar ele mesmo.

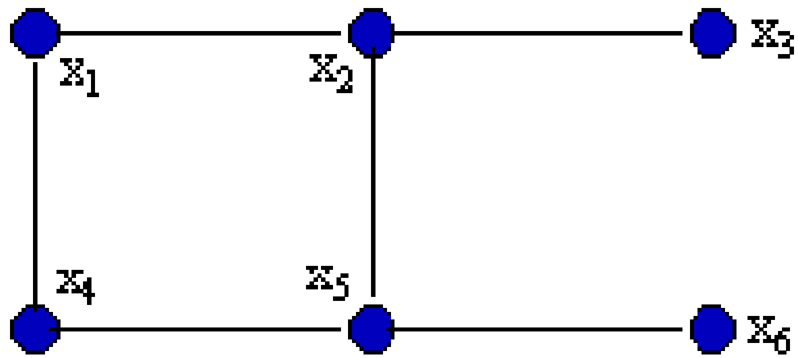
G₁₇



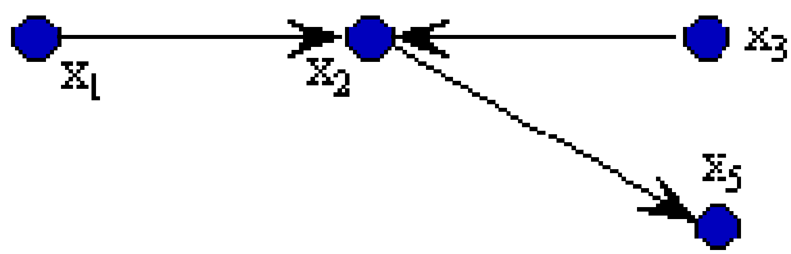
GRAFO CONEXO

- Um grafo *G*(*V*,*A*) é dito ser conexo se há pelo menos uma cadeia ligando cada par de vértices deste grafo *G*.

G_{12}

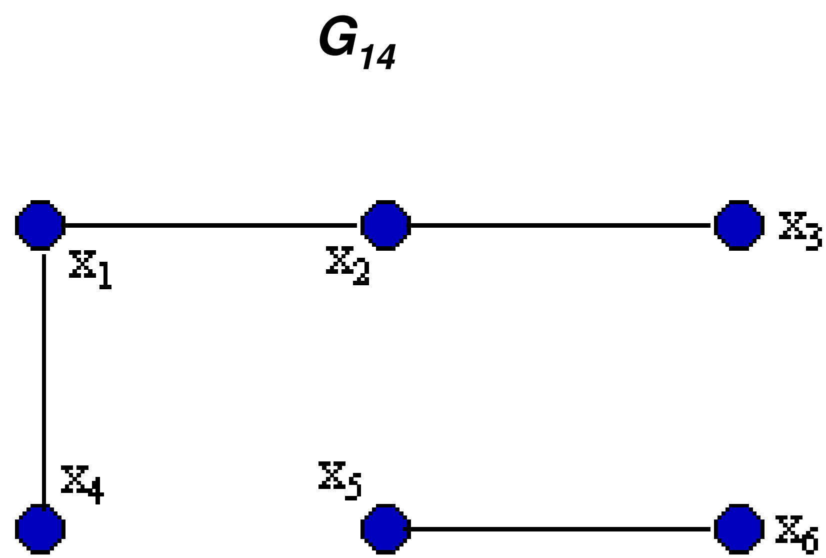


G_{13}



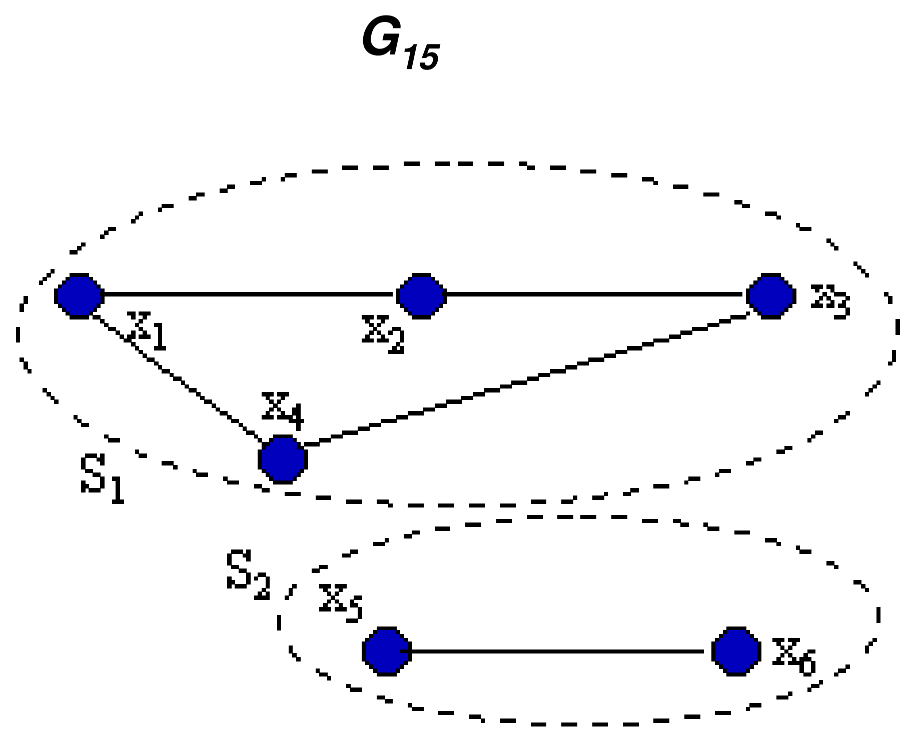
GRAFO DESCONEXO

- Um grafo *G*(*V,A*) é dito ser desconexo se há pelo menos um par de vértices que não está ligado por nenhuma cadeia.



COMPONENTE CONEXA

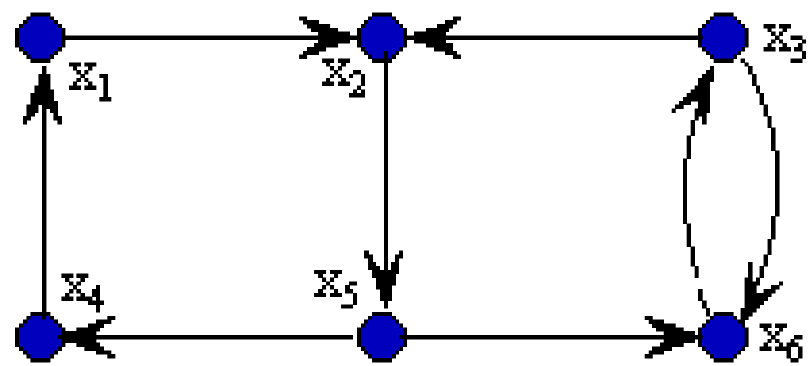
- Um grafo *G*(*V*,*A*) desconexo é formado por pelo menos dois subgrafos conexos, disjuntos em relação aos vértices.
- Cada um destes subgrafos conexos é disto ser uma componente conexa de *G*.



GRAFO FORTEMENTE CONEXO

- No caso de grafos orientados
- Um grafo é dito ser fortemente conexo (f-conexo) se todo par de vértices está ligado por pelo menos um caminho em cada sentido, ou seja, se cada par de vértices participa de um circuito.
- Isto significa que cada vértice pode ser alcançável partindo-se de qualquer outro vértice do grafo.

G_{16}



VÉRTICE DE CORTE

- Um vértice é dito ser um vértice de corte se sua remoção (juntamente com as arestas a ele conectadas) provoca um redução na conexidade do grafo. Os vértices x_2 em G_{13} e G_{14} são exemplos de vértices de corte

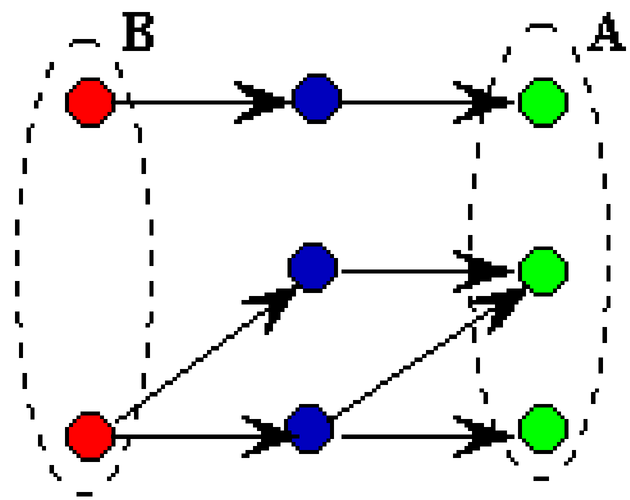
PONTE

- Uma aresta é dita ser um a ponte se sua remoção provoca um redução na conexidade do grafo. As arestas (x_1, x_2) em G_{13} e G_{14} são exemplos de pontes

BASE

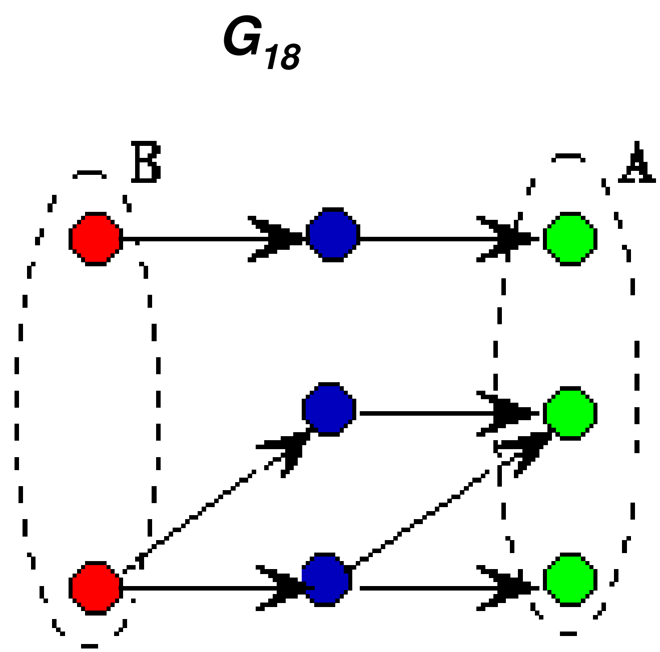
- Uma base de um grafo *G*(*V,A*) é um subconjunto B $\subset$ V, tal que:
  - dois vértices quaisquer de B não são ligados por nenhum caminho;
  - todo vértice não pertencente a B pode ser atingido por um caminho partindo de B.

G_{18}



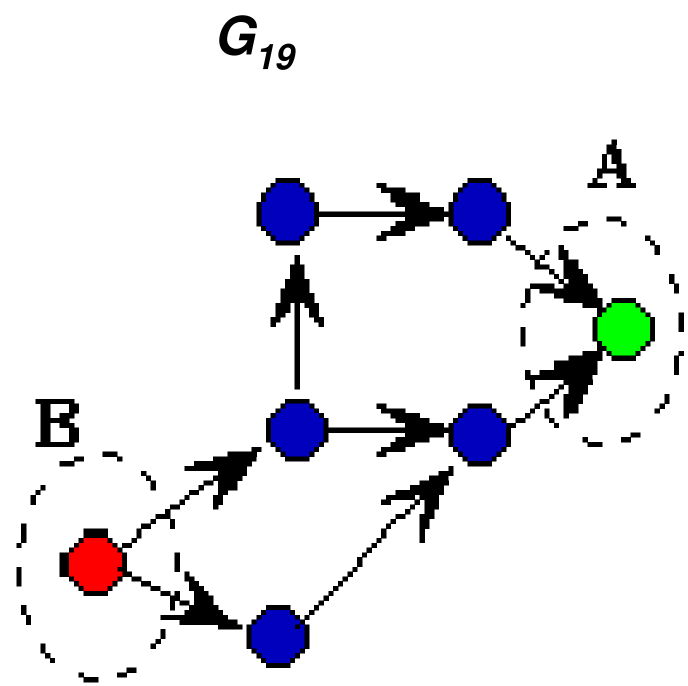
ANTI-BASE

- Uma anti-base de um grafo $G(V,A)$ é um subconjunto $A \subset V$, tal que:
  - dois vértices quaisquer de A não são ligados por nenhum caminho;
  - de todo vértice não pertencente a A pode ser atingir A por um caminho



RAIZ E ANTI-RAIZ

- **RAIZ** Se a base de um grafo *G*(*V,A*) é um conjunto unitário, então esta base é a raiz de G.
- **ANTI-RAIZ** Se a anti-base de um grafo *G*(*V,A*) é um conjunto unitário, então esta anti-base é a anti-raiz de G.



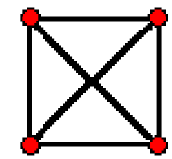
ÁRVORE

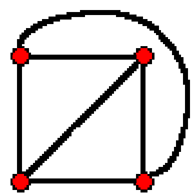
- Uma árvore é um grafo conexo sem ciclos.
- Seja *G(V,A)* um grafo com ordem $n > 2$; as propriedades seguintes são equivalentes para caracterizar G como uma árvore:
  - *G* é conexo e sem ciclos;
  - *G* é sem ciclos e tem n-1 arestas;
  - *G* é conexo e tem n-1 arestas;
  - *G* é sem ciclos e por adição de uma aresta se cria um ciclo e somente um;
  - *G* é conexo, mas deixa de sê-lo se uma aresta é suprimida (todas as arestas são pontes);
  - todo par de vértices de *G* é unido por uma e somente uma cadeia simples.

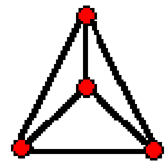
GRAFO PLANAR

- Um grafo $G(V,A)$ é dito ser planar quando existe alguma forma de se dispor seus vértices em um plano de tal modo que nenhum par de arestas se cruze.
- Ao lado aparecem três representações gráficas distintas para uma K_4 (grafo completo de ordem 4).
- Apesar de haver um cruzamento de arestas na primeira das representações gráficas, a K_4 é um grafo planar pois admite pelo menos uma representação num plano sem que haja cruzamento de arestas (duas possíveis representações aparecem nas figuras ao lado).
- Já uma K_5 e uma $K_{3,3}$ são exemplos de grafos não planares.
- Estes dois grafos não admitem representações planares.

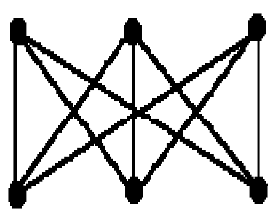
K_4



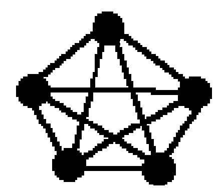




$K_{3,3}$

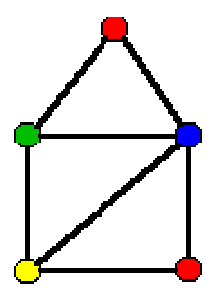


K_5



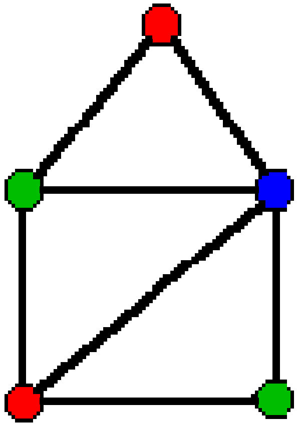
COLORAÇÃO

- Seja *G(V,A)* um grafo e *C* um conjunto de cores.
- Uma coloração de *G* é uma atribuição de alguma cor de *C* para cada vértice de *V*, de tal modo que a dois vértices adjacentes sejam atribuídas cores diferentes.
- Assim sendo, uma coloração de *G* é uma função $f: V \rightarrow C$ tal que para cada par de vértices $v,w \in V$ tem se $(v,w) \in E \Rightarrow f(v) \neq f(w)$.
- Uma *k*-coloração de *G* é uma coloração que utiliza um total de *k* cores.
- O exemplo abaixo mostra um 4-coloração para o grafo.



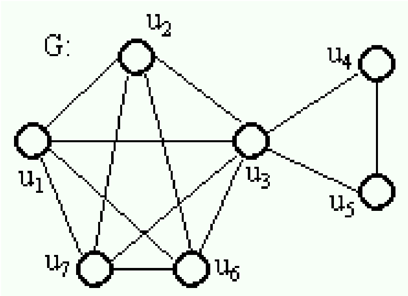
NÚMERO CROMÁTICO

- Denomina-se número cromático *X(G)* de um grafo *G* ao menor número de cores *k*, para o qual existe uma *k*-coloração de *G*.
- O exemplo abaixo mostra uma 3-coloração para o grafo, que é o número cromático deste grafo.



Grafos Eulerianos

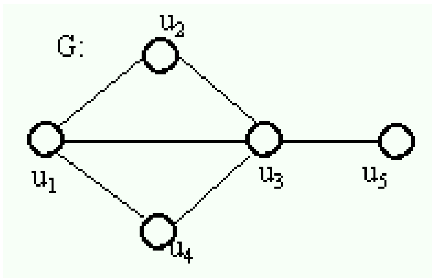
- Um **grafo G é dito ser euleriano** se há um ciclo em **G** que contenha todas as suas arestas.
- Este ciclo é dito ser um **ciclo euleriano**.
- O grafo da figura ao lado, por exemplo, é euleriano já que ele contém o ciclo: (u1, u2, u3, u4, u5, u3, u1, u6, u2, u7, u3, u6, u7, u1), que é euleriano.



- O teorema que se segue provê um solução simples para determinar se um grafo é euleriano:
- **Teorema:** Um multigrafo **M** é euleriano se e somente se **M** é conexo e cada vértice de **M** tem grau par.

GRAFO ATRAVESSÁVEL

- Agora, considere um multigrafo **G** tenha uma trilha (não um ciclo) contendo todas as arestas de M.
- Então G é dito ser um **grafo atravessável** e a trilha é dita ser uma **trilha euleriana**.
- No grafo ao lado, a trilha: (u1, u2, u3, u4, u1, u3, u5) é atravessável.



- O teorema seguinte indica precisamente quais grafos são atravessáveis:
- **Teorema**: Um multigrafo **M** é atravessável se e somente se **M** é conexo e tem exatamente dois vértices de grau impar. Consequentemente, qualquer trilha euleriana de **M** começa em um dos vértices de grau impar e termina no outro vértice de grau impar.