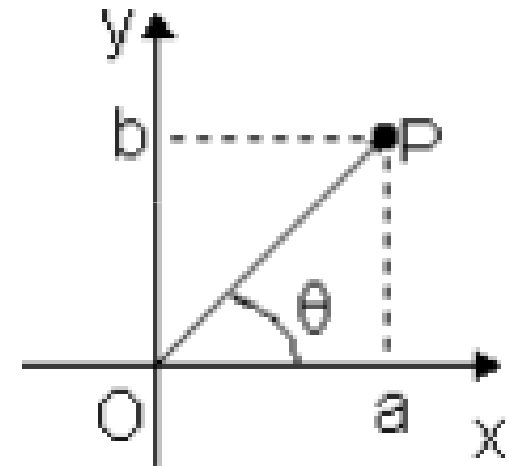


Sistemas de Coordenadas Polares

Prof. Rossini Bezerra
Faculdade Boa Viagem

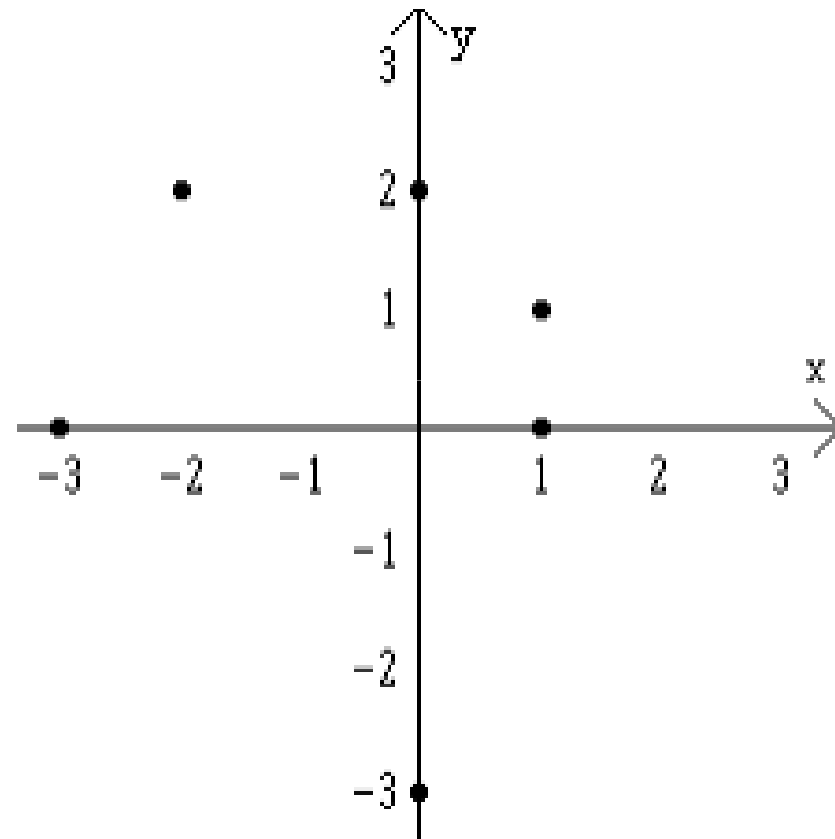
Coordenadas Polares

- Dado um ponto P do plano, utilizando coordenadas cartesianas (retangulares), descrevemos sua localização no plano escrevendo $P = (a,b)$ onde a é a projeção de P no eixo x e b , a projeção no eixo y .
- Podemos também descrever a localização de P , a partir da distância de P à origem O do sistema, e do ângulo formado pelo eixo x e o segmento OP , caso $P \neq O$.
- Denotamos $P = (r,\theta)$ onde r é a distância de P a O e θ o ângulo tomado no sentido anti-horário, da parte positiva do eixo Ox ao segmento OP , caso $P \neq O$.
- Se $P = O$, denotamos $P = (0,\theta)$, para qualquer θ .
- Esta maneira representar o plano é chamada Sistema de Coordenadas Polares.



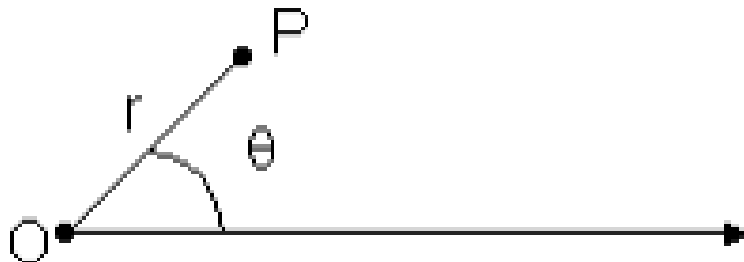
Exemplos

Coordenadas cartesianas	Coordenadas polares
$(1,0)$	$(1,0)$
$(0,2)$	$(2,\pi/2)$
$(-3,0)$	$(3,\pi)$
$(0,-3)$	$(3,3\pi/2)$
$(1,1)$	$(\sqrt{2},\pi/4)$
$(-2,-2)$	$(2\sqrt{2},3\pi/4)$



Polo e Eixo Polar

- Para representar pontos em coordenadas polares, necessitamos somente de um ponto O do plano e uma semi-reta com origem em O .
- Representamos abaixo um ponto P de coordenadas polares (r, θ) , tomando o segmento OP com medida r .
- Polo é o ponto fixo em O
- A semi-reta é chamada de eixo polar.

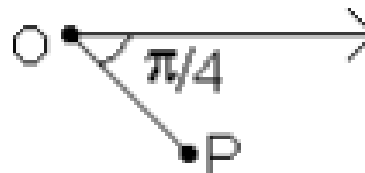


Classe de pares Ordenados

- Em coordenadas polares, podemos ter representações diferentes para um mesmo ponto, isto é, podemos ter $P = (r, \theta)$ e $P = (s, \alpha)$ sem que $r = s$ e $\theta = \alpha$, ou seja $(r, \theta) = (s, \alpha)$ não implica em $r = s$ e $\theta = \alpha$.
- Assim, (r, θ) não representa um par ordenado, mas sim uma classe de pares ordenados, representando um mesmo ponto
- Denotamos um ponto P por $(r, -\theta)$, para r e θ positivos, se θ é tomado no sentido horário.
- Assim, $(r, -\theta) = (r, 2\pi - \theta)$ e $(r, -\theta)$ é o simétrico de (r, θ) em relação à reta suporte do eixo polar

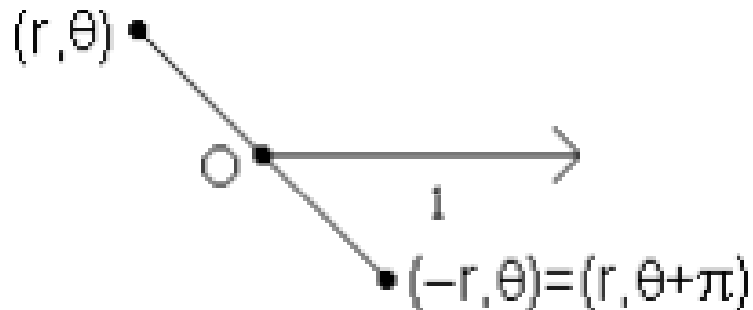
Exemplo

- $(1, -\pi/4) = (1, 7\pi/4)$

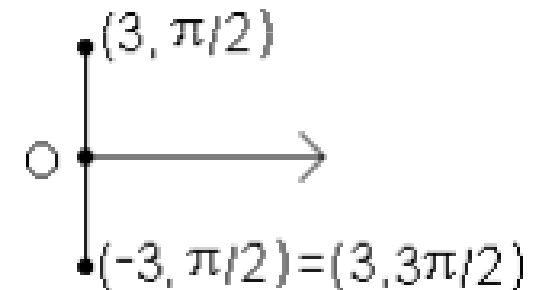


Simetria

- Denotamos P por $(-r, \theta)$, para r positivo, se $P = (r, \pi + \theta)$, ou seja, consideramos $(-r, \theta) = (r, \theta + \pi)$. Assim, $(-r, \theta)$ é o simétrico de (r, θ) em relação ao polo.



EXEMPLO: $(3, \pi/2) = (-3, 3\pi/2)$



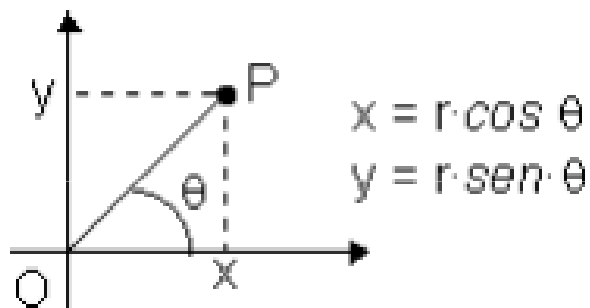
- Dado um ângulo θ , θ pode ser representado por $\theta + 2k\pi$, para todo k inteiro. Assim,
- $(r, \theta) = (r, \theta + 2\pi) = (r, \theta + 4\pi) = (r, \theta - 2\pi) = (r, \theta - 4\pi) = \dots$

Mudança de Coordenadas

- Um ponto P do plano pode ser representado em coordenadas cartesianas por (x,y) ou em coordenadas polares por (r,θ) . Para facilidade de comparação entre os dois sistemas, consideramos o ponto O coincidindo com a origem do sistema cartesiano e, a semi-reta, a parte do não negativa do eixo x .

Mudança de Coordenadas Polares para Coordenadas Cartesianas

- Seja P um ponto com coordenadas polares (r, θ) . Se $0 < \theta < \pi/2$ e $r > 0$. No triângulo retângulo OPx a seguir, obtemos as seguintes relações:



- Se $\theta = 0$ e $r > 0$, temos P no eixo das abscissas. Logo, P tem coordenadas cartesianas $(x, 0)$ e coordenadas polares $(x, 0)$ ($r = x$ e $\theta = 0$). Assim, $x = x \cdot 1 = r \cos \theta$ e $y = 0 = r \sin \theta$.
- Se $r = 0$, $P = (0, \theta)$ para qualquer θ . Aqui também, $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$.
- Para os casos onde $\theta \geq \pi/2$, fica como exercício mostrar que também vale:
- $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$.

Mudança de Coordenadas Cartesianas para Coordenadas Polares

- Seja P um ponto com coordenadas cartesianas (x,y) . Como vimos acima, considerando P com coordenadas (r,θ) , temos as relações $x = r.\cos\theta$ e $y = r.\sin\theta$
- Como $x^2+y^2 = r^2.\cos^2\theta + r^2.\sin^2\theta = r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta) = r^2.1 = r^2$
- $r^2 = x^2+y^2 \Rightarrow r = (x^2+y^2)^{1/2}$
- Se $r = 0$, isto é, $x = y = 0$ então podemos tomar θ qualquer. Se $r \neq 0$, θ é tal que $\cos\theta = x/r$ e $\sin\theta = y/r$.

EXEMPLO

1. A circunferência de centro na origem e raio 3 tem equação cartesiana $x^2 + y^2 = 9$. Como $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ então $r^2 = 9$, ou seja, $r = 3$ é a equação polar dessa circunferência.
2. Se P tem coordenadas cartesianas $(-1, 1)$ então $r^2 = (-1)^2 + 1^2$, ou seja, $r = 2^{1/2}$. Como $\cos \theta = -1/2^{1/2} = -2^{1/2}/2$; $\sin \theta = 1/2^{1/2} = 2^{1/2}/2$. então $\theta = 3\pi/4$. Assim, P temo como coordenadas polares, $(2, \frac{3}{4}\pi)$
- Logo, podemos também transformar equações cartesianas em polares e vice-versa

Lista Exercício 3

1) Transforme coordenadas cartesianas em coordenadas polares:

a) $(1,1)$ b) $(2,-2)$ c) $(\sqrt{3},1)$ d) $(4,0)$ e) $(0,-3)$

2) Transforme coordenadas polares em coordenadas cartesianas:

a) $(1,\pi/2)$ b) $(-2,49\pi/6)$ c) $(3,-5\pi/3)$ d) $(0,\pi/9)$ e) $(7,\pi)$

3) Encontre a equação polar para cada uma das seguintes equações cartesianas.

a) $(x-1)^2 + y^2 = 1$ b) $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 13$ c) $x = -2$ d) $y = 3$ e) $y = x$

4) Encontre a equação cartesiana para cada uma das seguintes equações polares.

a) $r = 5$ b) $r = 2\sin \theta$ c) $r = 2\cos \theta - 4\sin \theta$ d) $\theta = \pi/3$ e) $\sin \theta = \cos \theta$

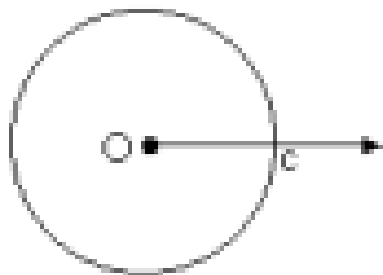
f) $r = \frac{2}{3\sin \theta - 5\cos \theta}$

5) Encontre as equações polares das seguintes curvas:

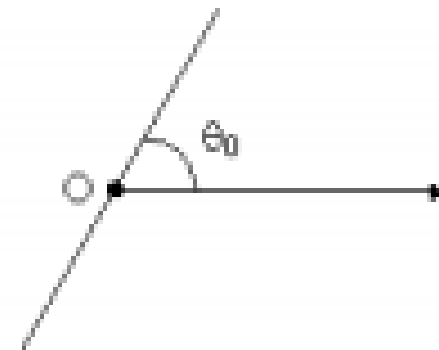
a) da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ b) da hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ c) da parábola $y = x^2$.

Gráficos em Coordenadas Polares

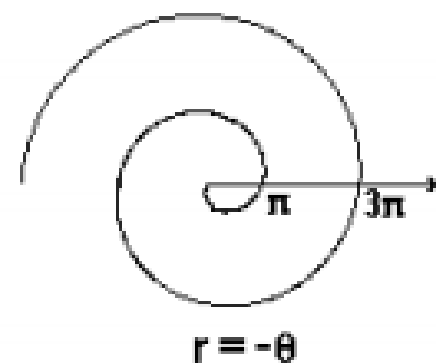
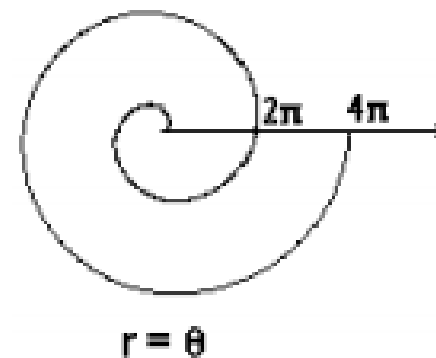
- Como no caso de equações cartesianas, um ponto P está no gráfico da curva de equação $r = f(\theta)$ se, e somente se, $P = (r, f(\theta))$. O uso de coordenadas polares simplifica, em alguns casos, equações de curvas. Apresentaremos alguns exemplos abaixo.
- Exemplo 1 $R = c$, c uma constante positiva. Esta equação representa os pontos do plano, cuja distância ao polo é igual a c , isto é, representa a circunferência de raio c e centro no polo. Observe que $r = -c$ representa a mesma circunferência.



- Exemplo 2 $\theta = \theta_0$ onde $\theta_0 \geq 0$. Esta equação representa os pontos $P = (r, \theta_0)$ onde r é um número real qualquer. Logo, $\theta = \theta_0$ representa uma reta passando pelo polo e que forma um ângulo de θ_0 com o eixo polar.



- Exemplo 3 $r = \theta$, $\theta \geq 0$. Representa os pontos $P = (r, r)$ onde $r \geq 0$, ou seja, os pontos P tais que a distância de P ao polo é igual ao ângulo, em radianos, entre o eixo polar e o segmento OP . A equação geral da espiral é dada por $r = a\theta$, considerando $\theta \geq 0$. Ao lado temos os gráficos de $r = \theta$ e $r = -\theta$, para $0 \leq \theta \leq 4\pi$

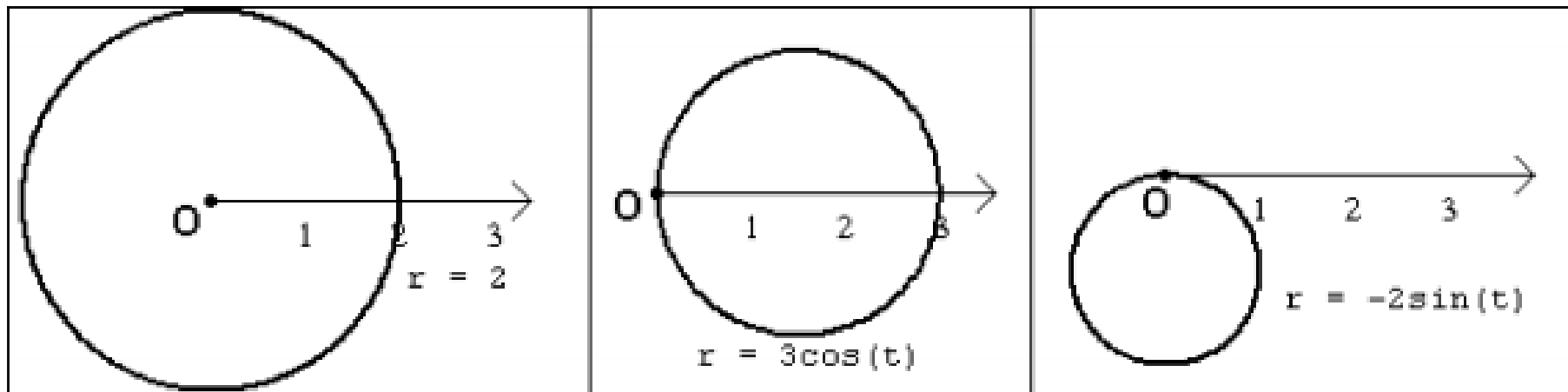


Procedimentos para Traçar Gráficos

- 1) Verificar se existem simetrias, isto é, se a equação se altera ao trocar:
 - a) θ por $-\theta$: simetria em relação à reta $\theta = 0$ (eixo x)
 - b) θ por $\pi - \theta$: simetria em relação à reta $\theta = \pi/2$ (eixo y)
 - c) θ por $\pi + \theta$: simetria em relação ao polo. É equivalente a trocar r por $-r$, pois $(-r, \theta) = (r, \theta + \pi)$. Logo $(r, \theta) = (-r, \theta) \Leftrightarrow (r, \theta) = (r, \theta + \pi)$.
- 2) Verificar se a curva passa pelo polo ($r = 0$)
- 3) Determinar os pontos da curva variando θ a partir de $\theta = 0$
- 4) Verificar a existência de pontos críticos (máximos e mínimos): $f(\theta)' = 0$ e $f''(\theta) > 0 \Rightarrow \theta$ é um mínimo relativo; $f(\theta)' = 0$ e $f''(\theta) < 0 \Rightarrow \theta$ é um máximo relativo.
- 5) Verificar se r não se altera ao trocar θ por $\theta + 2\pi$. Caso não haja alteração, basta variar θ entre 0 e 2π .

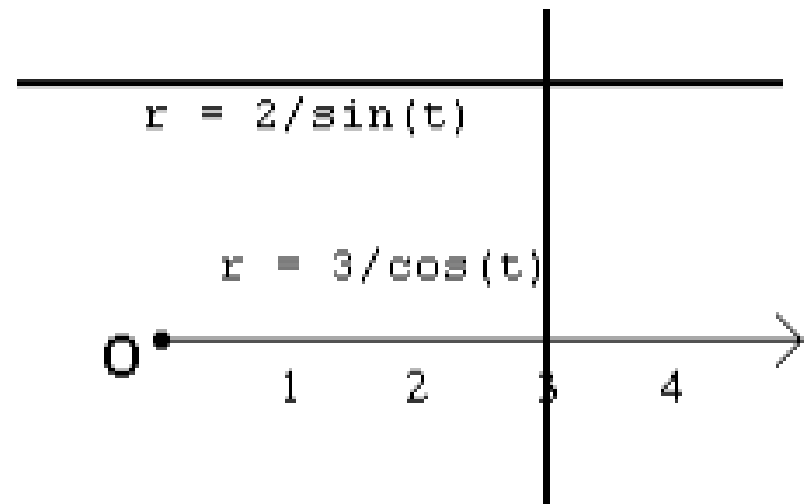
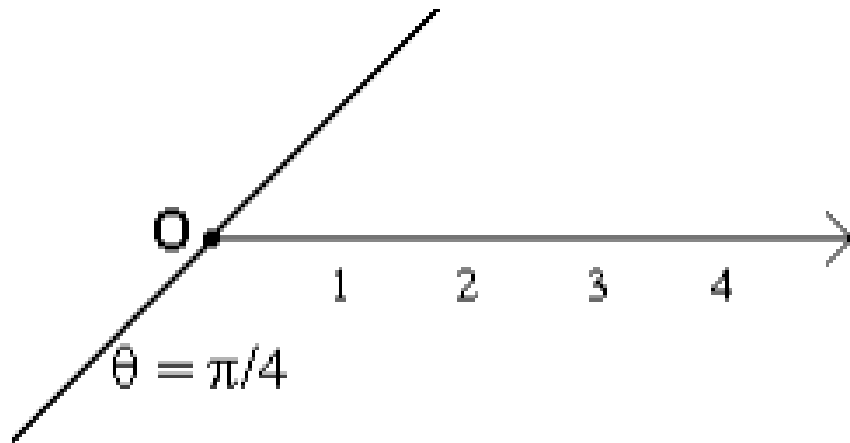
Equações de algumas curvas especiais em coordenadas polares: Circunferências

- a) $r = c$: circunferência com centro no polo e raio $|c|$.
- b) $r = a \cos(\theta)$: circunferência com centro na reta $\theta = 0$, passando pelo polo e raio $|a|/2$.
- c) $r = a \sin(\theta)$: circunferência com centro na reta $\theta = \pi/2$, passando pelo polo e raio $|a|/2$.



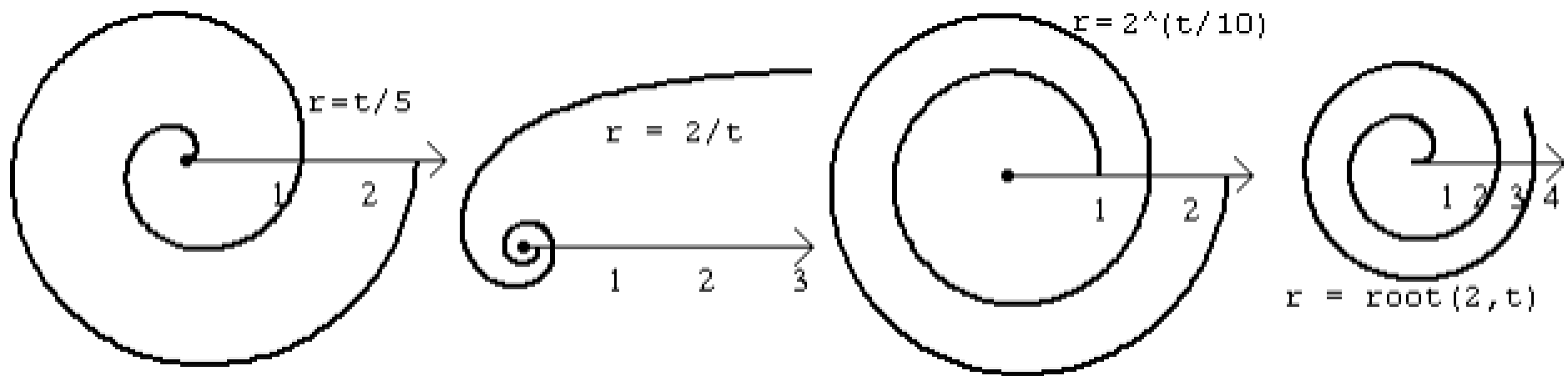
Equações de algumas curvas especiais em coordenadas polares: Retas

- a) $\theta = a$: reta passando pelo pólo
- b) $r \sin(\theta) = a$: reta paralela ao eixo polar
- c) $r \cos(\theta) = a$: reta perpendicular à reta que contém o eixo polar



Equações de algumas curvas especiais em coordenadas polares: Espirais

- a) $r = a\theta$: espiral de Arquimedes
- b) $r = a/\theta$: espiral hiperbólica
- c) $r = a^{b\theta}$, $a > 0$: espiral logarítmica
- d) $r = a.(\theta)^{1/n}$: espiral parabólica quando $n = 2$



Equações de algumas curvas especiais em coordenadas polares: Rosáceas

$r = a\sin(n\theta)$ ou $r = a\cos(n\theta)$, n inteiro positivo, $a \neq 0$.
Se n é par, o gráfico consiste de $2n$ laços. Se n é ímpar, o gráfico consiste de n laços. Observe que se $n = 0$ ou $n = \pm 1$, obtém-se equações de circunferências ou o pólo (caso $r = a\sin(n\theta)$).

