Sistema de coordenadas cartesiano

Geometria Analítica

Prof. Rossini Bezerra

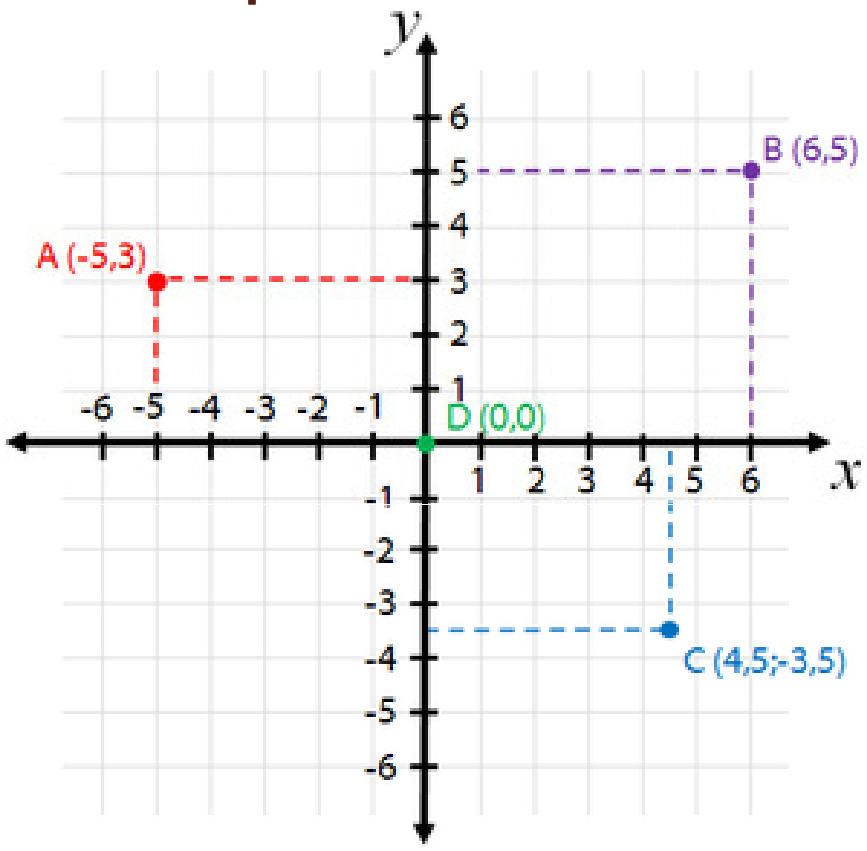
Definição

- **Sistema de Coordenadas no plano cartesiano** ou **espaço cartesiano** ou **plano cartesiano**
  - Um esquema reticulado necessário para especificar pontos num determinado "espaço" com dimensões.
- ***Cartesiano*** é um adjetivo que se refere ao matemático francês e filósofo Descartes que, entre outras coisas, desenvolveu uma síntese da álgebra com a geometria euclidiana.
  - Os seus trabalhos permitiram o desenvolvimento de áreas científicas como a geometria analítica, o cálculo e a cartografia.

Origem

- A idéia para este sistema foi desenvolvida em 1637 em duas obras de Descartes:
- *Discurso sobre o método*
  - Na segunda parte, Descartes apresenta a idéia de especificar a posição de um ponto ou objeto numa superfície, usando dois eixos que se intersectam.
- *La Géométrie*
  - onde desenvolve o conceito que apenas tinha sido referido na obra anterior.
- Um sistema de referência consiste em um ponto de origem, direção e sentido
- O sistema de coordenadas cartesianas é o mais próximo do mundo real,
  - Ele nos permite observar as formas da maneira mais aproximada possível do nosso modo de ver o universo.

Coordenadas cartesianas de alguns pontos do plano.



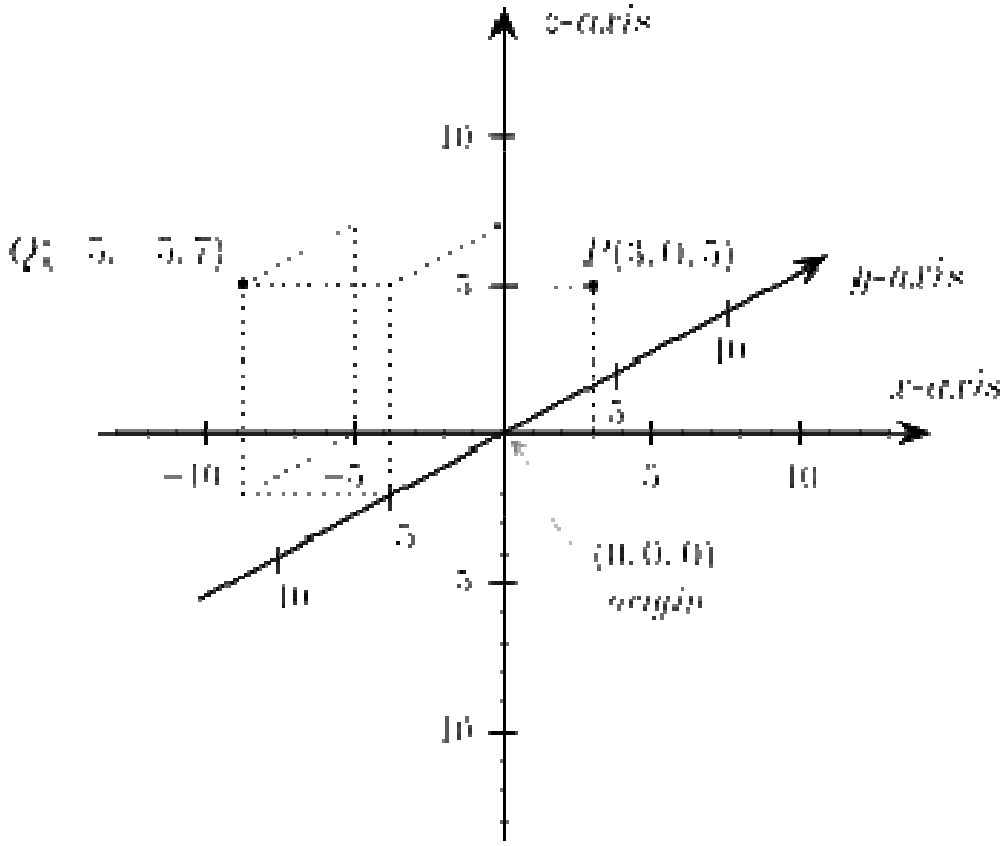
Propriedades

- ORIGEM (universo é uma linha)
  - Enxergar mais que uma direção e dois sentidos
  - Ponto de partida, ao qual chamamos de origem,
  - informa o sentido em que caminhamos,
    - Para a ***direita*** => **+**,
    - Para a ***esquerda*** => **-**
  - Cada ponto sobre a reta tem uma distância da origem, à qual chamamos amplitude, ou módulo
  - Desta forma, temos o nosso sistema bem caracterizado
  - Um sistema de referência como tal é chamado de sistema em **uma dimensão**
    - Porém não é algo muito útil
  - Se adicionarmos mais uma reta na origem, formando um ângulo reto com a reta anterior
    - Poderemos referenciar uma segunda direção,
    - Agora temos um sistema em **duas dimensões**, que nos permite localizar:
      - Um ponto acima e abaixo,
      - Além da direita ou Esquerda
  - Se fizermos a mesma analogia e colocarmos uma terceira reta sobre a origem do sistema anterior, fazendo um ângulo reto com ambas as retas anteriores, poderemos localizar:
    - Um objeto para frente ou para trás,
    - Além de acima ou abaixo e
    - Além da direita e esquerda,
    - Então teremos um sistema em **três dimensões**.
- A convenção mais usada nos sistemas de referência, estabelece que os sentidos:
  - **Para frente**,
  - **Para a direita** e
  - P**ara cima**
  - São **positivos** e
  - Os seus **opostos** são **negativos**.

3D - Dimensão

- Um sistema de coordenadas tridimensionais pode ser obtido através desta estrutura de três eixos que se interceptam em um único ponto,
  - Ao qual chamamos de origem
  - Marca uma distinção angular entre os eixos,
    - Fazendo com que cada um seja reto em relação aos vizinhos.
- Nos sentidos positivos coloca-se uma seta para indicar a progressão crescente dos valores.
- Num sistema como este, cada eixo recebe o nome (*x*,*y*,*z*) associado a variável que é expressa,
  - Representam as três direções do sistema.

Coordenadas cartesianas



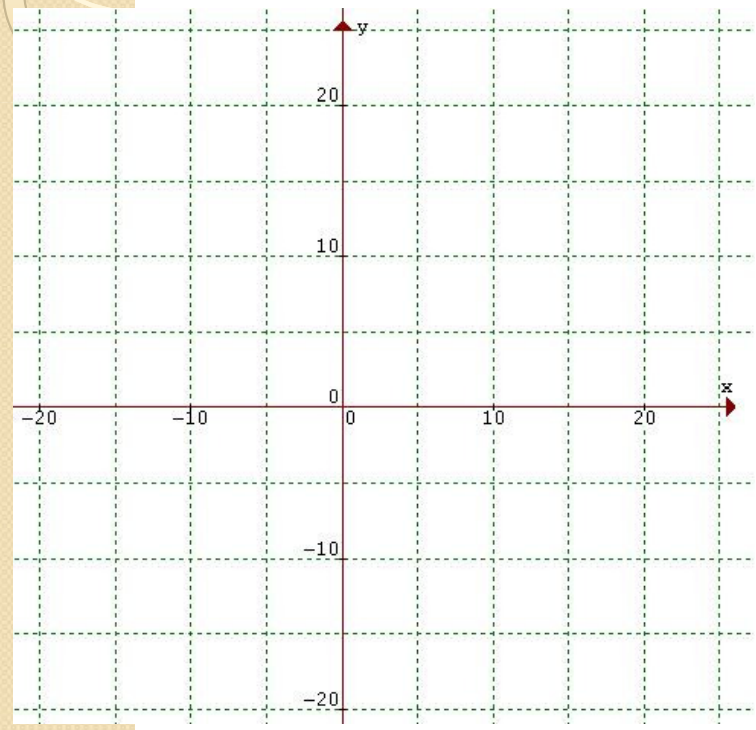
Localização de pontos

- Observe o sistema anterior,
- Distribuição das variáveis em seus eixos,
  - Eixo vertical correspondente à altura
    - É convencionado como eixo "z",
  - Eixo horizontal, correspondente à largura
    - É convencionalmente chamado de eixo "x",
  - O Eixo na diagonal, correspondente à profundidade,
    - É chamado de eixo "y",
  - Cada segmento de eixo partindo da origem
    - Gera um **octante**,
    - O sistema (3D) tem **oito** sub-planos partindo da origem.
- A tripla ordenada no formato *(x,y,z)*, corresponde a um único ponto no sistema
  - O qual é encontrado através do reflexo dos valores nos eixos,da

Planos primários

- Planos primários é um conjunto de pontos sobre o gráfico que estão eqüidistantes dos planos formados por qualquer combinação de dois eixos.
- Suponha que definimos um dos valores da tripla ordenada, por exemplo:
  - (a,y,z) ou,
  - (x,a,z) ou,
  - (x,y,a).
  - Onde a é uma constante.
- Em cada caso, temos um plano definido como paralelo ao plano dos dois eixos restantes,
  - Qualquer valor que seja dado às demais variáveis da tripla ordenada será projetado sobre o plano que foi definido.

Plano Cartesiano

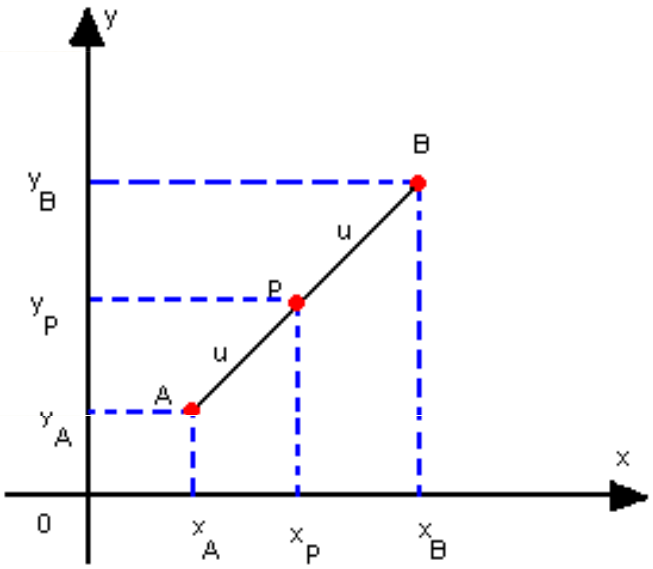


- Pontos A(x, y)
- Eixo das Abscissas, Ordenadas
- Quadrantes

Algumas Conclusões

- Pense e responda:
  - Se P(x, y) pertence ao eixo das abcissas, o que se pode afirmar com relação as suas coordenas?
  - Se P(x, y) pertence ao eixo das ordenadas, o que se pode afirmar com relação as suas coordenaas?
  - Se P(x, y) pertence ao 1° quadrante, o que se pode afirmar com relação as suas coordenaas?
  - E se P(x, y) pertencer ao 2° quadrante? E ao 3°? E ao 4°?

Ponto Médio

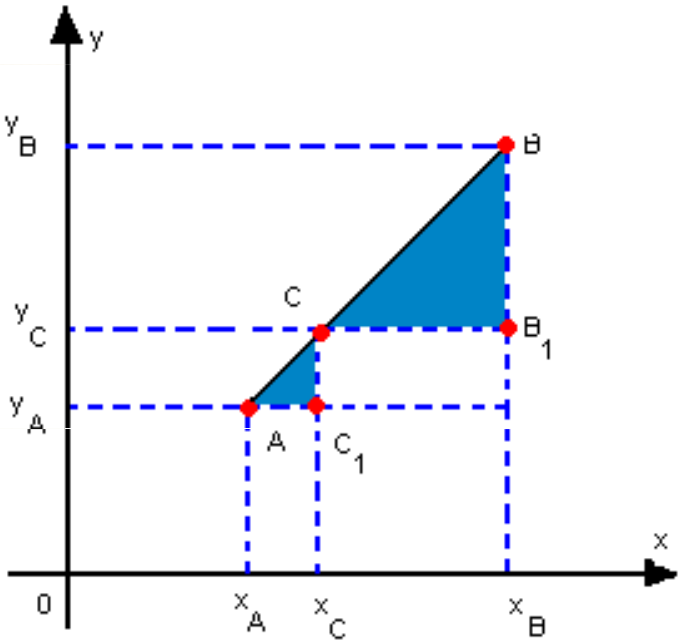


- Dados os pontos **A**(xA, yA), **B**(xB, yB) e **P**, que tem a mesma de distância de **A** e **B**, ou seja divide ao meio, temos que:
- Assim (xP, yP) são as coordenadas do ponto médio de **A** e **B**.

Razão de Secção

- Razão de secção entre os pontos **A**(xA, yA), **B**(xB, yB), é encontrar as coordenadas de um ponto **C**(xC, yC) que **secciona** (divide) o segmento numa determinada razão, denominada **razão de secção**.

Razão de Secção



$$r_c = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \Leftrightarrow \begin{cases} r_c = \dfrac{x_C - x_A}{x_B - x_C} \\ r_c = \dfrac{y_C - y_A}{y_B - y_C} \end{cases}$$

Distância entre pontos

- Em um sistema bidimensional temos a distância entre dois pontos definida como

$$D2_{ab} = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

- Para um sistema tridimensional a analogia segue o mesmo raciocínio, o que nos revela a seguinte fórmula:

$$D3_{ab} = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2}$$

Comprovação

- No plano *xy* a distância entre os dois pontos do sub-plano (*x,y,0*) é $D2_{ab}$, para obter a distância no espaço, precisamos encontrar a distância *xy* $\rightarrow$ z, mais precisamente a distância do ponto extremo, resultante do encontro dos valores de *x* e *y*, com o valor em z. Esta distância *xy* corresponde a $D2_{ab}$, logo:

$$D3_{ab} = \sqrt{(D2_{ab})^2 + (z_b - z_a)^2}$$

- O que define o seu valor após a substituição de $D2_{ab}$, resultando na fórmula definida anteriormente

A esfera

- Por definição, a esfera é o conjunto de todos os pontos no espaço que estão equidistantes de um ponto específico, ao qual denominamos centro. Considerando que as coordenadas de qualquer ponto são (*x,y,z*) e que podemos especificar um ponto de coordenadas (*h,k,l*) a distância entre os pontos é

$$D3_{ab} = \sqrt{(x-h)^2 - (y-k)^2 + (z-l)^2}$$

- Definimos $D3_{ab} = R$, que é o raio da esfera, conseqüentemente:

$$R^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2$$

- Quaisquer conjuntos de pontos que constituem uma esfera também são delimitadores de um espaço no interior da mesma que gera um volume, o qual pode ser calculado pelo cálculo de volumes com a técnica de secionamento por Lâminas paralelas;

Referências

- http://pt.wikipedia.org/wiki/Sistema_de_coordenadas_cartesiano
- ↑ João Jeronimo & Marcos Antônio Nunes de Moura. *Introdução ao Cálculo vol II*. 20 de março de 2013. 158 págs. Creative Commons Atribuição-Partilha (versão 3.0). Acesso em 13 jul. 2013.
- Ir para cima↑ João Jeronimo & Marcos Antônio Nunes de Moura. *Introdução ao Cálculo vol II*. 20 de março de 2013. 158 págs. Creative Commons Atribuição-Partilha (versão 3.0). Acesso em 13 jul. 2013.
- Ir para cima↑ João Jeronimo & Marcos Antônio Nunes de Moura. *Introdução ao Cálculo vol II*. 20 de março de 2013. 158 págs. Creative Commons Atribuição-Partilha (versão 3.0). Acesso em 13 jul. 2013.
- Ir para cima↑ João Jeronimo & Marcos Antônio Nunes de Moura. *Introdução ao Cálculo vol II*. 20 de março de 2013. 158 págs. Creative Commons Atribuição-Partilha (versão 3.0). Acesso em 13 jul. 2013.

O que você deve saber sobre

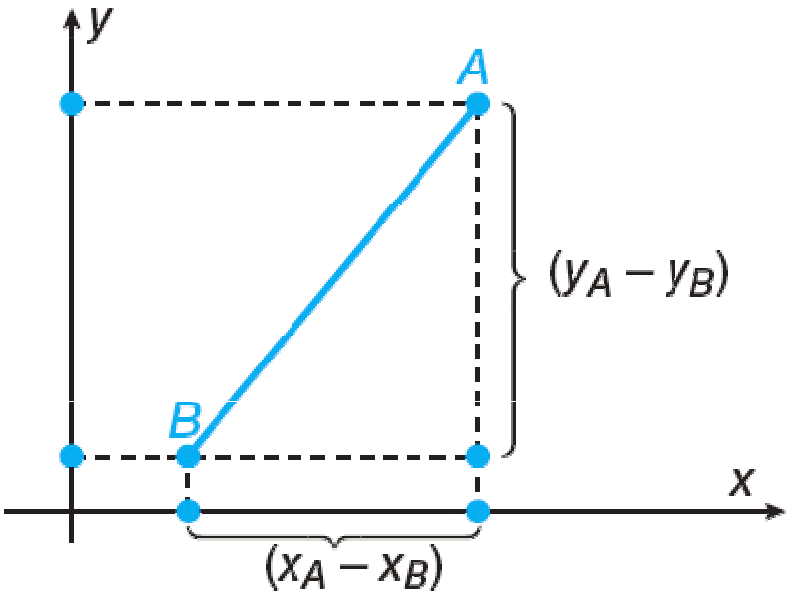
GEOMETRIA ANALÍTICA – DISTÂNCIAS

O estudo da geometria analítica tem início na determinação das distâncias entre entidades geométricas (pontos, retas, curvas) colocadas sobre o plano cartesiano. A partir daí, diversas situações podem surgir, como a definição de curvas complexas por meio de equações em que se relacionam os valores das coordenadas de seus pontos.

II. Distância de ponto a ponto

Dados dois pontos quaisquer, A e B, de coordenadas (x_A, y_A) e (x_B, y_B), respectivamente, a distância entre os pontos A e B pode ser obtida pela aplicação do teorema de Pitágoras.

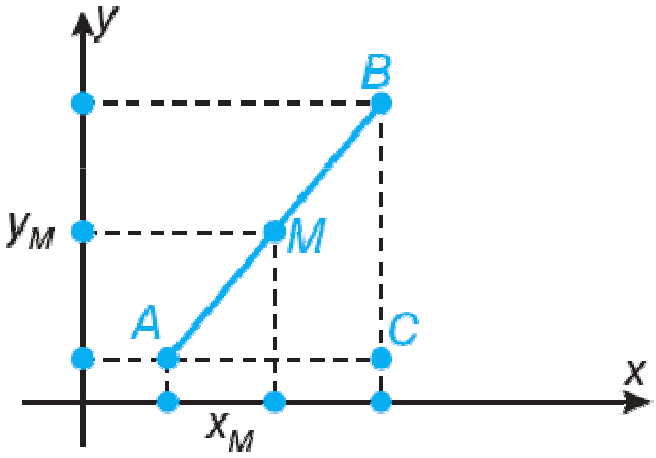
$$d_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$



II. Distância de ponto a ponto

Coordenadas do ponto médio de um segmento

As coordenadas x_M e y_M do ponto médio do segmento $\overline{AB}$ são, respectivamente, as médias aritméticas das coordenadas dos pontos *A* e *B*.

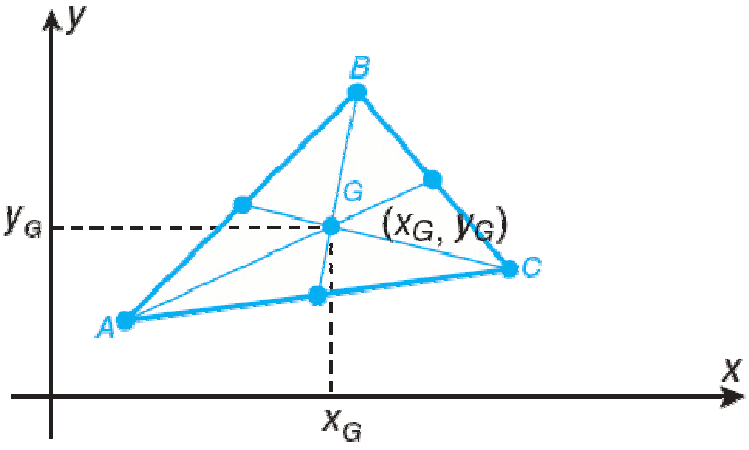


As coordenadas do ponto médio *M* do segmento $\overline{AB}$ são:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

II. Distância de ponto a ponto

Baricentro de um triângulo *ABC*



Coordenadas do baricentro *G* do triângulo *ABC*:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

II. Distância de ponto a ponto

Área do triângulo

Dado um triângulo de vértices *A*, *B* e *C*, localizado no plano cartesiano, sabe-se que a área do triângulo *ABC* é numericamente igual à metade do módulo do determinante formado pelas coordenadas dos pontos *A*, *B* e *C*:

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

- A
-
-

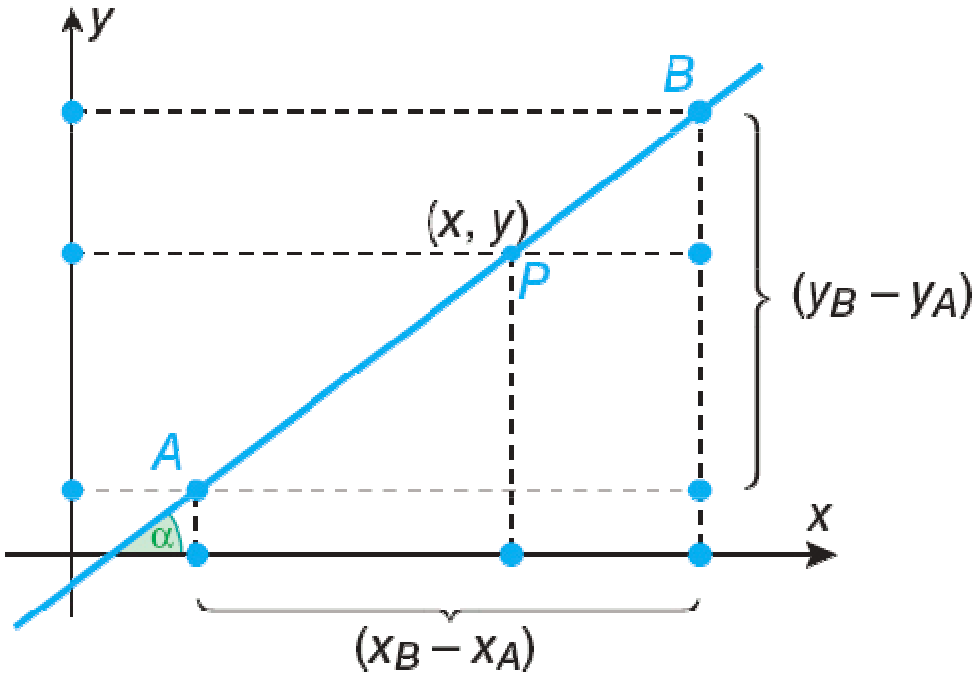
II. Distância de ponto a ponto

Condição de alinhamento de três pontos

Da expressão obtida para a área de um triângulo, podemos concluir que a condição de alinhamento para que três pontos distintos, *A*, *B* e *C*, estejam alinhados é:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

III. A equação da reta $y = mx + n$



Coeficiente ângular (*m*)

Está relacionado ao ângulo que a reta forma com o eixo das abscissas.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Se as escalas dos eixos *x* e *y* no gráfico são iguais, identificamos o coeficiente angular da reta com a tangente do ângulo α entre a reta e o eixo horizontal:

$$m = \operatorname{tg} \alpha$$

III. A equação da reta $y = mx + n$

Coeficiente linear (n)

Corresponde ao valor da ordenada do ponto em que a reta cruza o eixo y.

Para obtê-lo, refazemos o cálculo da declividade.

Usando a expressão obtida para m e substituindo os pontos por P e A:

$$m = \frac{(y - y_A)}{(x - x_A)} \Rightarrow y - y_A = m(x - x_A)$$

III. A equação da reta $y = mx + n$

Coeficiente linear da reta

Isolando y, teremos: $y = mx - mx_A + y_A$

Chamando o termo constante de $n = -mx_A + y_A$, a equação da reta, agora equação reduzida da reta, passa a ser escrita assim:

$$y = mx + n$$

Outro formato em que a equação da reta aparece (chamada equação segmentária da reta):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Nela, os coeficientes a e b são o valor de x no ponto em que $y = 0$ e o valor de y no ponto em que $x = 0$. Ou seja, a e b são os chamados cortes nos eixos x e y, respectivamente.

IV. Posições relativas entre retas no plano

Duas retas *r* e *s* inclinadas (i.e., não verticais e não horizontais) e com coeficientes angulares m_r e m_s respectivamente, quando consideradas ao mesmo tempo sobre o plano cartesiano, podem ser, uma em relação à outra:

Paralelas coincidentes: as duas retas possuem os coeficientes *m* e *n* iguais e todos os pontos em comum:

$$m_r = m_s \text{ e } n_r = n_s$$

Paralelas não coincidentes: os coeficientes angulares das duas retas são iguais, mas os lineares são distintos, e elas não apresentam pontos em comum:

$$m_r = m_s \text{ e } n_r \neq n_s$$

IV. Posições relativas entre retas no plano

Concorrentes: têm coeficientes angulares diferentes. Como consequência, as retas terão um único ponto em comum:

$$m_r \neq m_s$$

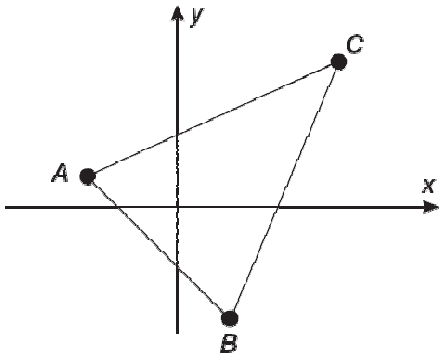
Caso particular de concorrência de retas: elas são perpendiculares. Além de seus coeficientes serem diferentes, o produto entre eles é igual a −1, i.e., o coeficiente angular de uma das retas é o inverso do oposto do coeficiente angular da outra.

$$m_r \cdot m_s = -1$$

EXERCÍCIOS ESSENCIAIS

1

(Unesp)
Dados dois pontos, *A* e *B*, com coordenadas cartesianas (-2, 1) e (1, -2), respectivamente, conforme a figura:



a) calcule a distância entre *A* e *B*.
b) sabendo-se que as coordenadas cartesianas do baricentro do triângulo *ABC* são $(x_G, y_G) = (2, 1)$, calcule as coordenadas (x_C, y_C) do vértice *C* do triângulo.

RESPOSTA:

a) $d_{AB} = \sqrt{(-2-1)^2 + (1+2)^2}$

$d_{AB} = 3\sqrt{2}$ u

b) $x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \Rightarrow \dfrac{2}{3} = \dfrac{-2+1+x_C}{3} \Rightarrow$

$\therefore x_C = 3$

$y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \Rightarrow 1 = \dfrac{1-2+y_C}{3} \Rightarrow$

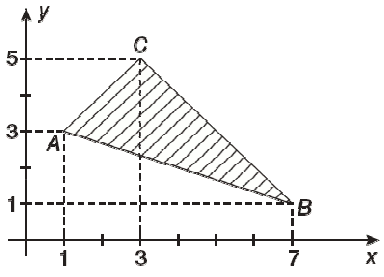
$\therefore y_C = 4$

$C(3, 4)$

EXERCÍCIOS ESSENCIAIS

5

(Uerj)
No sistema de coordenadas cartesianas a seguir, está representado o triângulo *ABC*.



Em relação a esse triângulo:
a) demonstre que ele é retângulo;
b) calcule a sua área.

RESPOSTA:

a) $A(1, 3)$; $B(7, 1)$ e $C(3, 5)$

$(d_{AB})^2 = (1-7)^2 + (3-1)^2 = 40$

$(d_{AC})^2 = (1-3)^2 + (3-5)^2 = 8$

$(d_{BC})^2 = (7-3)^2 + (1-5)^2 = 32$

$d_{AC}^2 + d_{BC}^2 = 8 + 32 = 40 = d_{AB}^2$

As medidas dos lados do triângulo *ABC* estão de acordo com o teorema de Pitágoras, portanto, ele é retângulo.

b) $A_{ABC} = \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \dfrac{d_{AC} \cdot d_{BC}}{2} = \dfrac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{32}}{2} = \dfrac{\sqrt{256}}{2}$

$\therefore A_{ABC} = 8\ u^2$

8

(UFC-CE)

ABC é o triângulo, no plano cartesiano, com vértices $A(0, 0)$, $B(2, 1)$ e $C(1, 5)$. Determine as coordenadas do ponto *P* do plano, tal que a soma dos quadrados das distâncias de *P* aos vértices de *ABC* seja a menor possível, e calcule o valor mínimo correspondente da soma.

RESPOSTA:

Queremos minimizar a expressão $AP^2 + BP^2 + CP^2$.

Seja $P = (x, y)$. Logo, $AP^2 + BP^2 + CP^2 =$

$= [(x - 0)^2 + (y - 0)^2] + [(x - 2)^2 + (y - 1)^2] + [(x - 1)^2 +$

$+ (y - 5)^2] = 3x^2 - 6x + 3y^2 - 12y + 31$

Como *x* e *y* variam independentemente um do outro, para minimizarmos a expressão acima, basta minimizarmos os binômios de grau 2:

$f(x) = 3x^2 - 6x$ e $g(y) = 3y^2 - 12y$.

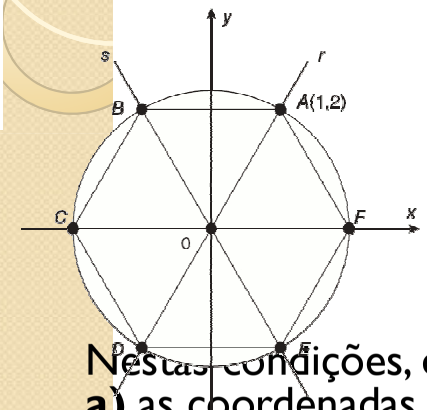
Calculando-se os mínimos $\left(-\frac{\Delta}{4a}\right)$ de $f(x)$ e $g(y)$ encontramos -3 e -12, respectivamente.

Portanto, o valor mínimo é

$AP^2 + BP^2 + CP^2 = -3 - 12 + 31 = 16$.

11

A figura representa, em um sistema ortogonal de coordenadas, duas retas, *r* e *s*, simétricas em relação ao eixo O_y, uma circunferência com centro na origem do sistema, e os pontos $A = (1, 2)$, *B*, *C*, *D*, *E* e *F* correspondentes às intersecções das retas e do eixo O_x com a circunferência.



Nestas condições, determine:

a) as coordenadas dos vértices *B*, *C*, *D*, *E* e *F* e a área do hexágono *ABCDEF*.

b) o valor do cosseno do ângulo $A\hat{O}B$.

RESPOSTA:

a) Pelas simetrias das retas *r* e *s* em relação aos eixos *Ox* e *Oy*, temos: $x_A = x_E = -x_B = -x_D = 1$ e $y_A = y_B = -y_D = -y_E = 2$.

Se $A = (1, 2)$, então $B = (-1, 2)$, $D = (-1, -2)$, $E = (1, -2)$.

Os segmentos $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$, $\overline{OE}$ e $\overline{OF}$ têm comprimento igual ao raio da circunferência dado por $OA = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

Agora:

$x_F = OF = \sqrt{5}$ e $y_F = 0$,

$x_C = -OC = -\sqrt{5}$ e $y_C = 0$

Portanto: $F = (\sqrt{5}, 0)$ e $C = (-\sqrt{5}, 0)$.

Como os trapézios *CBAF* e *CDEF* são congruentes, a área do hexágono *ABCDEF* é o dobro da área do trapézio *CBAF*, ou seja, é igual a:

$$2 \cdot \frac{(\overline{CF} + \overline{AB}) \cdot y_A}{2} = (2\sqrt{5} + 2) \cdot 2 = 4\sqrt{5} + 4$$

b) No triângulo *OAB*, pela lei dos cossenos,

$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos(A\hat{O}B) \Rightarrow$

$$\therefore \cos(A\hat{O}B) = \frac{(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 - 2^2}{2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3}{5}$$

EXERCÍCIOS ESSENCIAIS

12

(PU

Dadas a parábola $y = x^2 + x + 1$ e a reta $y = 2x + m$:

a) Determine os valores de m para os quais a reta intercepta a parábola.

b) Determine para qual valor de m a reta tangencia a parábola. Determine também o ponto de tangência.

RESPOSTA:

a) $2x + m = x^2 + x + 1 \Rightarrow x^2 - x + 1 - m = 0$ e

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (1 - m) = -3 + 4m$

A reta interceptará a parábola se $\Delta \geq 0$, portanto:

$-3 + 4m \geq 0 \qquad \therefore m \geq \frac{3}{4}$

b) A reta tangencia a parábola se $\Delta = 0$.

$\therefore m = \frac{3}{4}$

A reta terá equação $y = 2x + \frac{3}{4}$ e resolvendo o sistema:

$\begin{cases} y = 2x + \frac{3}{4} \\ y = x^2 + x + 1 \end{cases}$, teremos:

$2x + \frac{3}{4} = x^2 + x + 1 \Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0$

$\therefore x = \frac{1}{2}$ e $y = \frac{7}{4}$

Portanto, o ponto de tangência é $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right)$.

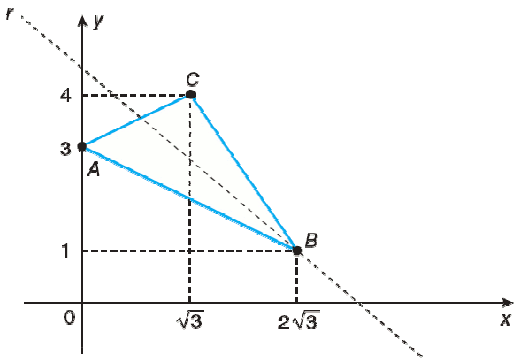
EXERCÍCIOS ESSENCIAIS

13

(IBMEC-SP)

Considere, no plano cartesiano da figura, o triângulo de vértices A, B e C.

Se r é a reta suporte da bissetriz do ângulo ABC, então o coeficiente angular de r é igual a:



a) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) –

c) $-\frac{4}{3}$.

d) $-\frac{3}{2}$.

e) $-\sqrt{3}$.

RESPOSTA: B

Sejam os pontos $D = (0, 1)$, $E = \left(\frac{\sqrt{3}}{AB}, 1\right)$, a medida do ângulo formado pelo segmento $\overline{AB}$ com a horizontal no sentido anti-horário e β a medida do ângulo determinado pela reta r no vértice B. Então:

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AD}{BD} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \therefore \alpha = 30°$

$\operatorname{tg}(\alpha + 2\beta) = \frac{CE}{BE} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

Assim, $\beta = 15°$. Se γ é o ângulo de inclinação da reta, temos:

$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - (30° - 45°) = 135°$

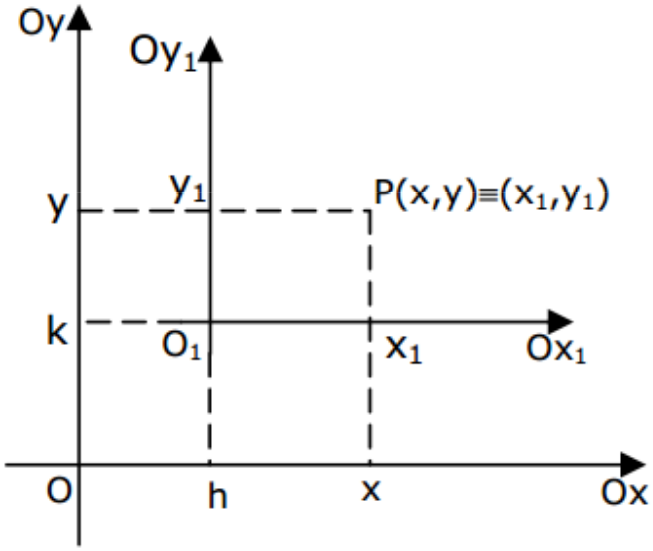
Seu coeficiente angular é, portanto, igual a $\operatorname{tg} 135° = -1$.

TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO DE EIXOS

- Sejam Ox e Oy os eixos primitivos, do Sistema Cartesiano de Eixos Coordenados com origem O(0,0). Sejam O_1x_1 e O_1y_1 os novos eixos coordenados com origem
- $O_1(h,k)$, depois que o sistema primitivo foi transladado. Seja P(x,y) um ponto qualquer do sistema primitivo.
- Portanto, o mesmo ponto P terá Coordenadas $P(x_1,y_1)$, em relação ao novo sistema. Pela figura abaixo temos que:

$$\begin{cases} x = x_1 + h \\ y = y_1 + k \end{cases}$$

Equações de Translação no $\Re^2$



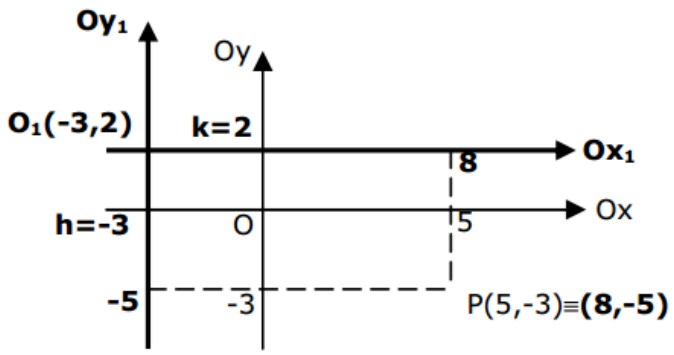
- Observe que, fazer uma translação no $\Re^2$ é transladar o sistema antigo (primitivo), paralelamente aos eixos Ox e Oy, para uma nova origem $O_1(h,k)$.

EXEMPLO 1

- Determine as coordenadas do ponto P(5,-3), em relação ao novo sistema, depois de realizado uma translação para a nova origem $O_1(-3,2)$.
- Solução: Usando as equações de translação, teremos:

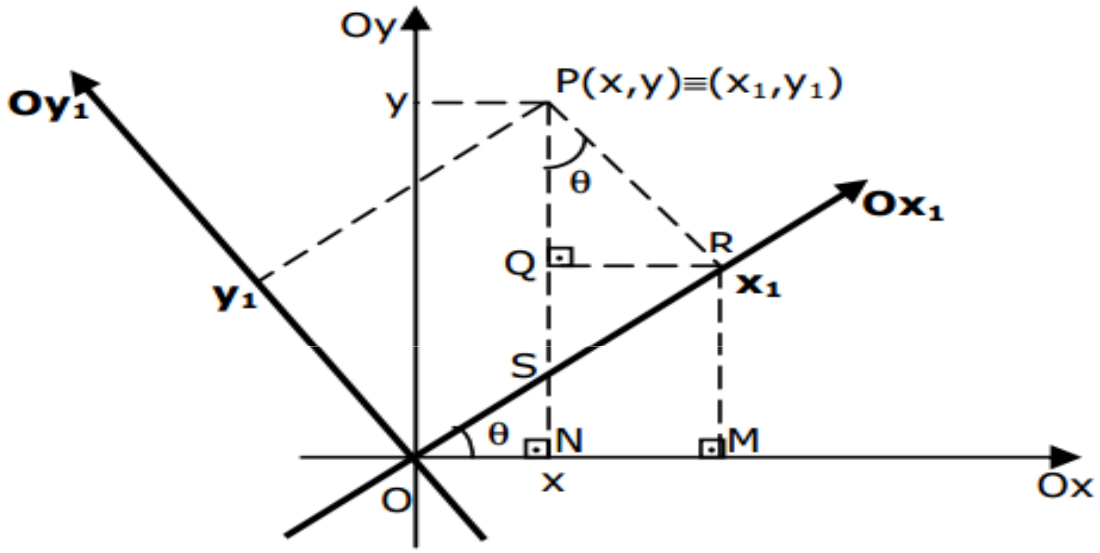
$$\begin{cases} x = x_1 + h \\ y = y_1 + k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 5 - (-3) = 8 \\ y_1 = -3 - 2 = -5 \end{cases} \Rightarrow P(x_1, y_1) = (8,-5)$$



ROTAÇÃO DE EIXOS NO $\Re^2$

- Sejam Ox e Oy os eixos primitivos, do Sistema Cartesiano de Eixos Coordenados com origem O(0,0).
- Sejam Ox_1 e Oy_1 os novos eixos coordenados depois que o sistema primitivo foi rotacionado de um ângulo θ em torno da origem O(0,0).
- Logo, θ é o ângulo formado entre os eixos Ox e Ox_1.
- Seja P(x,y) um ponto qualquer do sistema primitivo.
- Portanto, o mesmo ponto P terá coordenadas $P(x_1,y_1)$, em relação ao novo sistema.



- Pela figura acima temos: $\begin{cases} x = \overline{OM} - \overline{NM} \\ y = \overline{NQ} + \overline{QP} \end{cases}$.

No triângulo OMR: $\cos\theta = \dfrac{\overline{OM}}{x_1} \Rightarrow \overline{OM} = x_1\cos\theta$ e

$\overline{MR} = \overline{NQ}$ e

$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\overline{NQ}}{x_1} \Rightarrow$

$\overline{NQ} = x_1\operatorname{sen}\theta$. No triângulo PQR: $\overline{QR} = \overline{NM}$ e $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\overline{NM}}{y_1} \Rightarrow \overline{NM} = y_1\operatorname{sen}\theta$ e

$\cos\theta = \dfrac{\overline{QP}}{y_1} \Rightarrow \overline{QP} = y_1\cos\theta$. Portanto, $\begin{cases} x = \overline{OM} - \overline{NM} \\ y = \overline{NQ} + \overline{QP} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x = x_1\cos\theta - y_1\operatorname{sen}\theta} \\ \mathbf{y = x_1\operatorname{sen}\theta + y_1\cos\theta} \end{cases}$,

chamadas de **equações de rotação no $\Re^2$.** Podemos escrever as equações de rotação na forma matricial: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, onde $[M]_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ é chamada de **matriz de rotação de um ângulo θ.**

Exemplo (5): Determine as coordenadas do ponto P(-2,6), após os eixos coordenados sofrerem uma rotação de 60°.

Exemplo 2

- Determine as coordenadas do ponto P(-2,6), após os eixos coordenados sofrerem uma rotação de 60°
- **Solução**: Usando as equações de rotação:

$$\begin{cases} -2 = x_1 \cos 60^\circ - y_1 \operatorname{sen} 60^\circ \\ 6 = x_1 \operatorname{sen} 60^\circ + y_1 \cos 60^\circ \end{cases} \quad \begin{cases} -2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}y_1 \\ 6 = \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}y_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - \sqrt{3}y_1 = -4 \\ \sqrt{3}x_1 + y_1 = 12 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear, teremos: $\begin{cases} x = -1 + 3\sqrt{3} \\ y = 3 + \sqrt{3} \end{cases}$

Portanto, o ponto P terá novas coordenadas:

$P(-1 + 3\sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$.